

или подготовительных выработках.

Таким образом, в результате анализа выполненных исследований установлено, что структурно-морфологический контроль свойств и распределения напряжений в блочных породах позволяет выявить их отличия от сплошной среды; относительное перемещение блоков определяет подвижность пород, возрастающую по мере вовлечения в это движение более крупных порядков границ раздела, что предопределяет изменение характера проявления горного давления и сдвижения горных пород по мере увеличения масштабов воздействия на массив горных работ; выделяемая иерархия блоков и границ раздела позволяет прогнозировать изменение состояния выработок, используя для этой цели данные геологической разведки на ранних стадиях освоения месторождения и в процессе его эксплуатации; учет подвижности блоков позволяет более обоснованно подойти к планированию очередности отработки участков месторождения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Медведев Р.В. Структурные неоднородности и их роль в формировании свойств горных пород // Р.В. Медведев, Э.В. Каспарян, Г.А. Ковалева / ФТПРПИ. – 1972. – №2. – С. 25-37.
2. Казикаев Д.М. Геомеханические процессы при совместной и повторной разработке руд / Д.М. Казикаев. – М.: Недра, 1981. – 288 с.
3. Фисенко Г.Л. Предельные состояния горных пород вокруг выработок / Г.Л. Фисенко. – М.: Недра, 1976. – 272 с.
4. Дзевомский Я. Инженерно-геологические исследования при гидротехническом строительстве / Я. Дзевомский, И.С. Комаров, Л.А. Молоков, Ф. Рейтер. – М.: Недра, 1981. – 352 с.
5. Добыча и обработка природного камня. Справочник. – М.: Недра, 1990. – 445 с.
6. Протопопов И.И. Влияние структуры блочных пород при распределении напряжений в горном массиве / И.И. Протопопов, В.Д. Талий, В.К. Пискарев, Ю.С. Афанасьев // Прогноз геомеханических процессов и управление горным давлением на шахтах / Сб. науч. тр. – Л.: ВНИМИ, 1985. – С. 84–93.
8. Геологические термины (терминологический справочник). – М.: Недра, 1986. – 324 с.

УДК 622.831.312

Канд. техн. наук И.Н. Слащев  
(ИГТМ НАН Украины)

### **РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ И ТЕХНОЛОГИИ КОМПЬЮТЕРНОГО АНАЛИЗА ТЕКТОНИЧЕСКИ НАРУШЕННОГО СТРУКТУРНО-НЕОДНОРОДНОГО ПОРОДНОГО МАССИВА**

Представлені математична модель та особливості формування обчислювальних процедур для оцінки напружено-деформованого стану тектонічно порушеного структурно-неоднорідного породного масиву.

### **THE DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL MODEL AND TECHNOLOGY OF COMPUTER ANALYSIS OF TECTONICALLY DISTURBED STRUCTURALLY-HETEROGENEOUS ROCK MASSIF**

A mathematical model and specific features of the computational procedures to evaluate the stress-strain state of tectonically disturbed structurally-heterogeneous rock massif.

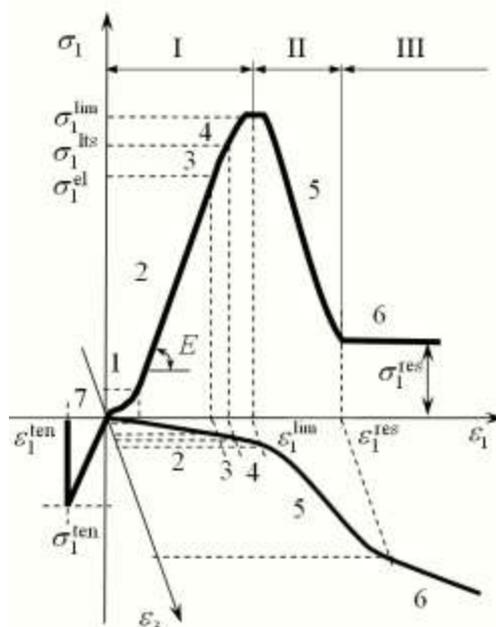
Закономерности деформирования породного массива могут быть определены анализом изменений его напряженно-деформированного состояния (НДС) с помощью компьютерных систем, использующих концепцию объектно-

ориентированного программирования. Такая технология исследования сложных объектов и процессов включает вычислительный эксперимент, основанный на построении и анализе с помощью ЭВМ математических моделей. Компонентами технологии являются математическое обеспечение и программные средства, а процесс состоит из четко регламентированной последовательности выполнения операций над данными и действий разной степени сложности. Несмотря на то, что развитие информационных технологий привело к существенному повышению качества ряда программных продуктов, решение недоступных прямой экспериментальной проверке сложных геомеханических задач, все еще вызывает значительные трудности. В частности, в структуре вычислительного эксперимента наиболее сложными являются создание математической модели и вычислительного алгоритма, соответствующих специфике деформирования реального массива, модели функционирования всей системы и непосредственно программная реализация численного метода. Это связано с тем, что породный массив имеет сложное строение, обусловленное разнообразной структурой залегания пластов, разбросом упругих и прочностных свойств, исходной трещиноватостью, анизотропией прочностных и деформационных свойств, геологической нарушенностью, газо- и водонасыщенностью и др.

Для решения сложных многофакторных задач наиболее адаптированным является метод конечных элементов (МКЭ), который основан на упрощении гладких функций дискретно-линейными полиномами и представлении исследуемой области в виде плоских или пространственных элементов. Теоретическая база МКЭ основана на свойстве сил реакций идеальных связей, которое утверждает, что для равновесия механической системы необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ действующих на систему внешних сил при любом возможном перемещении было равно работе внутренних напряжений (принцип возможных перемещений). То есть процедура МКЭ обеспечивает равновесие системы при заданных граничных условиях.

Деформационная модель пород определяет тип зависимостей «напряжение-деформация» и позволяет установить взаимосвязь между параметрами неравнокомпонентного поля напряжений в реальном массиве горных пород и типом его разрушения. В условиях объемного сжатия породы имеют два основных состояния – до предела прочности и за пределом прочности [1-3]. Зависимость напряжения от деформации имеет восстающий участок до предела прочности (зона I, участки 1-4, рис. 1) и ветвь разупрочнения (участки 5-6). Так как большинству горных пород свойственна малая пористость, то в первой фазе приложения нагрузки (участок 1) деформация происходит, в основном, за счет изменения пористости и сопровождается уплотнением. На участке 2 наблюдается практически линейное приращение деформаций, которое обусловлено сжатием скелета породы. Переход от фазы уплотнения породы к разрушению происходит сначала с незначительным возрастанием пластической составляющей деформации (криволинейный участок до предела прочности, участки 3, 4) и характеризует предел несущей способности пород. Этот процесс сопровождается «проращением» микродефектов, возникновением и ростом изолированных

трещин, что приводит к увеличению интенсивности деформаций. Для корректного решения сложных задач оценки НДС пород математическая модель должна включать учет как пластического, так и хрупкого разрушения за пределом прочности, то есть полную деформационную характеристику породы.



1 – уплотнение за счет изменения пористости; 2 – сжатие скелета горной породы; 3 – возникновение микродефектов; 4 – прораствание микродефектов и рост изолированных трещин; 5 – распространение открытых трещин и снижение общей прочности; 6 – остаточное трение разрушенной породы

Рис. 1. – Характерный вид полной диаграммы «напряжение-деформация» по данным одноосных и объемных испытаний горных пород (по данным [2]).

Рассмотрим модель породного массива, состоящую из двумерных весомих симплекс элементов. Предпочтение отдано привязанным к системе координат традиционным индексной и матричной формам представления уравнений.

Процесс создания структуры исходных данных включает формирование:

вспомогательного вектора данных

$$A, B, H, n^k, n^e, \dots \rightarrow \{VSP\};$$

массива координат

$$x_j, y_j, \dots \rightarrow [COORD^{xy}]|_{j++};$$

массива заданных узловых сил по осям  $x$  и  $y$

$$F_j^x, F_j^y, \dots \rightarrow [F^{xy}]|_{j++};$$

массива заданных узловых перемещений

$$u_j^x, u_j^y, \dots \rightarrow [u^{xy}]|_{j++};$$

класса физико-механических свойств

$$E_i, \nu_i, \gamma_i, \tau_{0i}, \varphi_i, \sigma^{ten} \rightarrow [FMS_{1-6}]|_{i+++},$$

где  $A, B$  – высота и ширина расчетной схемы, м;  $H$  – глубина расположения выработок, м;  $E_i$  – модуль упругости, Мпа;  $\nu_i$  – коэффициент Пуассона;  $\gamma_i$  – объемный вес, МН/м<sup>3</sup>;  $\tau_{0i}$  – сцепление, Мпа;  $\varphi_i$  – угол внутреннего трения, град;  $\sigma^{ten}$  – предел прочности на растяжение, Мпа;  $i++$ ,  $j++$  – инкременты, наращивающие индексы массивов (и программных классов) до числа элементов ( $n^e$ ) или до числа узлов ( $n^k$ ), для простоты изложения показаны циклы только по элементам и узлам.

Термин «класс» в данном случае употребляется в рамках понятий объектно-

ориентированного программирования как абстрактный пользовательский тип данных, определяющий одинаковый интерфейс и реализацию для всех своих экземпляров. Например, класс  $[FMS_{1-6}]$  содержит векторы аргументов (в данном случае шесть одномерных массивов физико-механических и прочностных свойств пород для каждого элемента расчетной схемы) и порядок их передачи на вход алгоритма. При этом индексы данного класса и, соответственно, входящие в класс векторы, в процессе решения инкрементируются ( $i++$ ) до числа элементов ( $n^e$ ).

Если на участке кривой деформирования до предела прочности на сжатие связь напряжений и деформаций упрощенно принята линейной, то для упругой среды используется базовая процедура МКЭ, которая хорошо апробирована и предусматривает вычисление матрицы жесткости системы, узловых сил и перемещений, упругих напряжений и деформаций элементов. Технология компьютерного анализа содержит ряд процедур, выполняемых программно для каждого элемента и узла расчетной схемы в соответствии с известными соотношениями теории упругости и механики горных пород [1, 4-8].

Формируем класс связи шести компонент узловых перемещений с коэффициентами линейных функций, аппроксимирующих перемещения по осям  $x$  и  $y$  каждого элемента, путем извлечения значений из массива координат узлов структуры исходных данных:

$$CD_{k,l,m}^{xy} = \begin{bmatrix} 1 & x_k & y_k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_l & y_l & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_m & y_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_l & y_l \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_m & y_m \end{bmatrix}_i \leftarrow COORD^{xy} \left[ \begin{matrix} \\ \\ \\ i++ \\ j++ \end{matrix} \right], \quad (1)$$

где  $k, l, m$  – индексы узлов с координатами  $x$  и  $y$ , окружающих  $i$ -ый элемент.

Формируем массив, содержащий результаты вычислений значений площадей элементов из значений класса координат узлов

$$S_i = 0,5 \begin{vmatrix} x_l - x_k & y_m - y_k \\ x_m - x_k & y_l - y_k \end{vmatrix} \leftarrow CD_{k,l,m}^{xy} \left[ \begin{matrix} \\ \\ \\ i++ \end{matrix} \right]. \quad (2)$$

Функции формы треугольного элемента представляем в виде:

$$\begin{aligned} N_k &= 0,5 S_i \begin{vmatrix} x_l y_m - x_m y_l \\ x_l - y_m \\ x_m - x_l \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{vmatrix}, \\ N_l &= 0,5 S_i \begin{vmatrix} x_m y_k - x_k y_m \\ x_m - y_k \\ x_k - x_m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{vmatrix}, \\ N_m &= 0,5 S_i \begin{vmatrix} x_k y_l - x_l y_k \\ x_k - y_l \\ x_l - x_k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (3)$$

При рассмотрении статических задач, согласно общим положениям механики сплошной среды, напряжения и деформации в некоторой точке модели для

плоской задачи теории упругости будут удовлетворять дифференциальным уравнениям статического равновесия [4, 9, 10]:

$$d\sigma^x/dx + d\tau^{yx}/dy + F^x = 0, \quad d\sigma^y/dy + d\tau^{xy}/dx + F^y = 0; \quad (4)$$

и соотношениям для относительных деформаций

$$\varepsilon^x = du^x/dx, \quad \varepsilon^y = du^y/dy, \quad \gamma^{xy} = du^x/dy + du^y/dx. \quad (5)$$

где  $\sigma^x, \sigma^y$  – нормальные компоненты тензора напряжений по координатным осям  $x$  и  $y$ , Мпа;  $\tau^{xy} = \tau^{yx}$  – касательные напряжения, Мпа;  $F^x, F^y$  – проекции вектора сил на координатные оси, МН;  $\gamma^{xy}$  – деформации поперечного сдвига;  $u^x, u^y$  – осевые перемещения, м.

Относительные деформации элемента:

$$\begin{aligned} du^x/dx &= N'_k{}^x u_k^x + N'_l{}^x u_l^x + N'_m{}^x u_m^x; \\ du^y/dy &= N'_k{}^y u_k^y + N'_l{}^y u_l^y + N'_m{}^y u_m^y; \\ du^x/dy + du^y/dx &= N'_k{}^y u_k^x + N'_l{}^y u_l^x + N'_m{}^y u_m^x + N'_k{}^x u_k^y + N'_l{}^x u_l^y + N'_m{}^x u_m^y. \end{aligned} \quad (6)$$

Из значений класса координат узлов формируем градиентную матрицу, связывающую перемещения узлов и деформации элементов, которая содержит производные линейных функций влияния узлов (функции формы,  $N$ )

$$\$F \equiv \begin{bmatrix} N'_k{}^x & N'_l{}^x & N'_m{}^x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N'_k{}^y & N'_l{}^y & N'_m{}^y \\ N'_k{}^y & N'_l{}^y & N'_m{}^y & N'_k{}^x & N'_l{}^x & N'_m{}^x \end{bmatrix}_i \leftarrow \mathcal{D}_{k,l,m}^{xy} \Big|_{i++}, \quad (7)$$

где  $N'_k{}^x, N'_l{}^x, N'_m{}^x, N'_k{}^y, N'_l{}^y, N'_m{}^y$  – результаты вычисления производных функций формы:

$$\begin{aligned} N'_k{}^x &= 0,5 \mathcal{S}_l - y_m \Big|_{i++}, & N'_k{}^y &= 0,5 \mathcal{S}_m - x_l \Big|_{i++}, \\ N'_l{}^x &= 0,5 \mathcal{S}_m - y_k \Big|_{i++}, & N'_l{}^y &= 0,5 \mathcal{S}_k - x_m \Big|_{i++}, \\ N'_m{}^x &= 0,5 \mathcal{S}_k - y_l \Big|_{i++}, & N'_m{}^y &= 0,5 \mathcal{S}_l - x_k \Big|_{i++} \end{aligned} \quad (8)$$

Формируем массив упругости для условий плоской деформации путем вычисления упругих коэффициентов для всех элементов расчетной схемы

$$EL = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} E_i & & & 1-\nu_i & \nu_i & 0 \\ & & & \nu_i & 1-\nu_i & 0 \\ & & & 0 & 0 & -2\nu_i/2 \\ \hline & & & -2\nu_i & +\nu_i & \end{array} \right]_i \leftarrow MS_{1,2} |_{i++} \cdot \quad (9)$$

Вычисляем коэффициенты жесткости элементов (Matrix Stiffness of Element) для конечных элементов треугольного типа и формируем матрицы жесткости элементов

$$K^{MSE} \leftarrow S \cdot SF^T \cdot SF \cdot EL |_{i++} \cdot \quad (10)$$

Формируем матрицу жесткости системы (Matrix Stiffness of Systems) путем рассылки в адреса оперативной памяти коэффициентов жесткости элементов и их суммирования с ранее накопленными коэффициентами

$$K^{MSS} \leftarrow K^{MSE} |_{i++} \cdot \quad (11)$$

Вычисляем массовые силы для каждого элемента и добавляем результаты вычислений к массиву заданных узловых сил системы

$$\Delta F^y \leftarrow \frac{1}{3} S \cdot MS_3 |_{i++ j++};$$

$$F^{xy} = F_j^x, F_j^y + \Delta F_j^y \leftarrow F^{xy} + \Delta F^y |_{j++} \cdot \quad (12)$$

Формируем массив узловых сил, относящихся к каждому элементу

$$F^{El} = F_k^x, F_l^x, F_m^x, F_k^y, F_l^y, F_m^y |_{i-} \leftarrow \left\{ \begin{array}{l} D_{k,l,m}^{xy} \\ F^{xy} \end{array} \right|_{i++} \quad (13)$$

Матрица жесткости системы содержит коэффициенты линейных уравнений связи узловых сил и узловых перемещений. Решаем систему линейных уравнений, получаем коэффициенты матрицы жесткости и вычисляем неизвестные перемещения узлов, представленных через шесть компонент узловых перемещений по осям координат  $x$  и  $y$

$$u = u_k^x, u_l^x, u_m^x, u_k^y, u_l^y, u_m^y |_{i-} \leftarrow K^{MSS}^{-1} F^{El} |_{i++} \cdot \quad (14)$$

Получаем значения неизвестных узловых перемещений

$$u_{i++}^{xy} = u_j^x, u_j^y \leftarrow u_{i++}^{j++}. \quad (15)$$

Вычисляем относительные упругие (Elastic) деформации элементов по значениям компонент узловых перемещений

$$\varepsilon_i^{el} = \varepsilon_i^x, \varepsilon_i^y, \gamma_i^{xy} \leftarrow \left[ F_{i++} u_{i++} \right]. \quad (16)$$

По значениям деформаций вычисляем осевые и касательные упругие напряжения в каждом элементе

$$\sigma_i^{el} = \sigma_i^x, \sigma_i^y, \tau_i^{xy} \leftarrow \left[ L_{i++} \varepsilon_i^{el} \right]. \quad (17)$$

Производим перерасчет массива узловых сил по найденным упругим напряжениям

$$F_{i++}^{xy} \leftarrow S \left[ F_{i++}^T \sigma_i^{el} \right]. \quad (18)$$

Результаты расчета главных упругих напряжений (Principal Elastic Stresses) и деформаций, получаем по формулам [11] и помещаем в отдельные массивы для вывода на печать и визуализации результатов:

$$\sigma_i^{Pr.el} = \sigma_{1i}^{Pr.el}, \sigma_{3i}^{Pr.el} = 0,5 \left( \sigma_i^x + \sigma_i^y \pm \sqrt{\sigma_i^x - \sigma_i^y \pm 4\tau_i^{xy}} \right) \leftarrow \sigma_i^{el},$$

$$\varepsilon_i^{Pr.el} = \varepsilon_{1i}^{Pr.el}, \varepsilon_{3i}^{Pr.el} = 0,5 \left( \varepsilon_i^x + \varepsilon_i^y \pm \sqrt{\varepsilon_i^x - \varepsilon_i^y \pm 4\gamma_i^{xy^2}} \right) \leftarrow \varepsilon_i^{el}. \quad (19)$$

Углы наклона векторов максимальных главных напряжений и деформаций соосны. Они показывают, насколько бывшее поперечным до деформации сечение отклоняется от поперечного сечения деформированного элемента, и определяются выражениями

$$\alpha_{\sigma}^{xy} = 0,5 \arctg \left( \tau^{xy} / \left( \sigma_1^{Pr.el} - \sigma^y \right) \right);$$

$$\alpha_{\varepsilon}^{xy} = 0,5 \arctg \left( \gamma^{xy} / \left( \varepsilon_1^{Pr.el} - \varepsilon^y \right) \right). \quad (20)$$

Теорема единственности в теории упругости утверждает, что если вместе с объемными силами заданы поверхностные силы или перемещения, в теле существует только одно поле напряжений, а зависимость напряжений от дефор-

маций линейно-упругая и ограничивается малыми деформациями. То есть по базовой процедуре МКЭ мы определяем НДС только упругой среды. Однако фактические деформационные характеристики пород имеют различные свойства, особенно в предельной области. Одни породы обладают более хрупкими свойствами, например песчаник, другие – той или иной степенью пластичности (аргиллит, алевролит). Для моделирования различных законов пластического течения, задания дополнительных силовых воздействий от влияния горнотехнических процессов в выработках и учета многообразия свойств разрушающейся среды процедуру МКЭ совмещаем с процедурой метода начальных напряжений (МНН). Рассмотрим последовательность компьютерной реализации модели.

Для каждого дискретного элемента расчетной схемы после установки всех граничных условий и выполнения первого этапа вычислений по базовой процедуре МКЭ мы определили теоретические максимальные главные напряжения  $\sigma_1^{Pr.el}$ , которые будут справедливыми только в условиях упругой среды. В зависимости от того, какого типа напряжения возникли в элементе модели их необходимо сравнить с критериями прочности на сжатие (compression) или растяжение (tension). Для критериального анализа состояния каждого элемента в области неравнокомпонентного сжатия, характеристики породы  $\tau_0$  и  $\varphi$  извлекаем из класса заданных физико-механических свойств элементов. По критерию Кулона-Мора предельные главные напряжения (limit principal stresses) в области сжатия представим через главные напряжения и сформируем массивы:

фактического предела прочности породы

$$\sigma_{I-}^{lim} = 2\tau_{0i} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_i}{2}\right) \leftarrow \left[ \text{FMS}_{4,5} \right]_{i++}; \quad (21)$$

теоретического предела прочности при рассчитанных (суммарных) значениях главных напряжений

$$\sigma_{I-}^{Pr} = \sigma_{1i}^{Pr.el} - \frac{1 + \sin \varphi_i}{1 - \sin \varphi_i} \sigma_{3i}^{Pr.el} \leftarrow \left\{ \left[ \text{FMS}_5 \right]_{i++} \right\}. \quad (22)$$

Предел прочности породы на растяжение задаем или прямым способом – путем ввода полученных в лабораторных условиях значений в шестой элемент программного класса физико-механических свойств пород [FMS<sub>6</sub>], или принимаем равным значению  $\sigma^{ten} = \tau_0/5$ , которое автоматически рассчитывается в программе. Оба способа не противоречат законам механики горных пород и могут быть использованы при моделировании.

В деформационной модели породы, как показано на рис. 2, степень пластичности в зоне разупрочнения и остаточной прочности пород определяются положением точек «А» и «В» (пример фактической диаграммы выделен жирной линией). Положение точки «А» однозначно определено критерием Кулона-



$$ps^{com} = \sigma_i^{Pr} - \sigma_i^{lim} \leftarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{1_i}^{Pr.el} \\ \sigma_1^{lim} \end{array} \right|_{i++}; \quad (23)$$

$$ps^{ten} = \sigma_i^{Pr} + \sigma_i^{ten} \leftarrow \left\{ \begin{array}{l} FMS_6 \end{array} \right|_{i++}. \quad (24)$$

Проводим анализ признаков: если значение массива  $\{ps^{com}\}$  в зоне сжатия меньше нуля, то НДС элемента соответствует упругой зоне (зона I, определена на промежутке  $[0; \varepsilon_1^{lim}]$ , рис. 2); если больше или равно нулю – зонам разупрочнения и остаточной прочности (зоны II, III, определены на промежутках  $[\varepsilon_1^{lim}; k^{in} \varepsilon_1^{lim}]$  и  $[\geq k^{in} \varepsilon_1^{lim}]$ , соответственно); если значение массива  $\{ps^{ten}\}$  больше нуля, то элемент считается разорванным по одному из направлений и его прочность в дальнейших вычислениях принимается близкой к нулю.

Определимся с фактическими параметрами заданной деформационной модели. Представим закон Гука через главные деформации в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= E \left[ \varepsilon_1 + \nu \varepsilon_3 \right] \sqrt{1 - \nu^2}, \\ \sigma_3 &= E \left[ \varepsilon_3 + \nu \varepsilon_1 \right] \sqrt{1 - \nu^2}, \end{aligned} \quad (25)$$

подставим значения в формулу (22) и решим относительно максимальной главной деформации. В результате вычислений получаем массив предельных упругих максимальных главных деформаций элементов (в точке А графика), выраженный через фактический предел прочности породы (21) и ее реальные физико-механические свойства

$$\varepsilon_{1_i}^{lim} = \frac{\sigma_i^{lim} \sqrt{1 - \nu_i^2}}{E_i \left( 1 + \nu_i \operatorname{ctg} \xi - \frac{1 + \sin \varphi_i}{1 - \sin \varphi_i} \operatorname{ctg} \xi + \nu_i \right)} \leftarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{1_i}^{lim} \\ FMS_{1,2,4} \end{array} \right|_{i++}. \quad (26)$$

Имея результаты решения уравнения (26) получаем векторы, содержащие значения минимальной и максимальной компонент напряжений в точке предела прочности

$$\sigma_{3_i}^{lim} = \frac{E_i \left[ \varepsilon_{1_i}^{lim} + \varepsilon_{1_i}^{lim} \operatorname{ctg} \xi + 2\tau_{0_i} \operatorname{ctg} \left( 45 - \varphi_i / 2 \right) \right] \sqrt{1 - \nu_i^2}}{\sqrt{1 - \nu_i^2} \sqrt{1 + \operatorname{ctg} \xi}} \leftarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{1_i}^{Pr.el} \\ FMS_{1,2,4,5} \end{array} \right|_{i++}; \quad (27)$$

$$\sigma_{1_i}^{lim} = \sigma_i^{lim} - \sigma_{3_i}^{lim} \frac{1 + \sin \varphi_i}{1 - \sin \varphi_i} \leftarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma^{Pr.el} \\ \sigma_1^{lim} \end{array} \right|_{i++}. \quad (28)$$

Здесь минимальная главная предельная деформация  $\varepsilon_3^{\text{lim}}$  представлена как функция максимальной главной деформации через заданный параметр  $\text{ctg}\xi$  ( $\varepsilon_1 \text{ctg}\xi = \varepsilon_3$ ), определяющий закон пластического течения (при  $\xi = \pi/4$  – течение равнообъемное).

Если напряжения в элементе расчетной схемы не превышают предельного уровня (зона I), связь между напряжениями и деформациями рассчитываем как линейную. При этом фактические напряжения и деформации будут равны упругим расчетным параметрам и соответствовать значениям, полученным из выражений (19).

Упругопластическую задачу решаем повторением упругих решений с сохранением исходной матрицы жесткости системы. Если расчетные упругие напряжения в области сжатия превышают предел прочности, то считаем, что деформация  $\varepsilon_1^{\text{Pr.el}}$  в точке «С» – «теоретическая» и не соответствует реальной, так как действует другое уравнение связи напряжений и деформаций. Очевидно, что при корректном решении задачи значения рассчитанных главных напряжений и деформаций в результате вычислений должны быть равны фактическим главным напряжениям и деформациям  $\sigma_1^{\text{act}}, \sigma_3^{\text{act}}, \varepsilon_1^{\text{act}}, \varepsilon_3^{\text{act}}$  (actual), которые соответствуют заданной деформационной модели среды.

Практическую реализацию программного алгоритма по деформационной теории пластичности осуществляем итерационной процедурой последовательного приближения расчетных напряжений к фактическим (кривая С-F-G, рис. 2). Сначала определим минимальные главные напряжения, которые имела бы реальная порода при рассчитанных теоретических деформациях  $\varepsilon_1^{\text{Pr.el}}$  на первой (точка «D» графика) и последующих итерациях расчета.

$$\sigma_{3 \text{ II}}^{\text{act n}} = \frac{E_i \left[ \varepsilon_{1i}^{\text{Pr.el n}} + \varepsilon_{1i}^{\text{Pr.el n}} \text{ctg}\xi + 2\tau_{0i} \text{ctg} \left( 45 - \varphi_i / 2 \right) \left( \varepsilon_{1i} - 1 \right) \right]}{\left( 1 - \nu_i \right) \left( 1 + \text{ctg}\xi \right)} \leftarrow \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{1i}^{\text{Pr.el}} \\ \text{FMS}_{1,2,4,5} \end{array} \right|_{i++} \cdot \quad (29)$$

Расчет фактических максимальных главных напряжений для зоны разупрочнения (зона II) выполняем по соотношению, описывающему функцию снижения прочности породы на участке от предельного напряжения  $\sigma_1^{\text{lim}}$  до остаточного  $\sigma_1^{\text{res}}$  (residual). Если в модели снижение прочности принято линейным, то расчет проводим по интерполяционному уравнению

$$\sigma_{1 \text{ II}}^{\text{act n}} = \sigma_{1i}^{\text{lim}} - \left( \frac{\varepsilon_{1i}^{\text{Pr.el n}} - \varepsilon_{1i}^{\text{lim}}}{\varepsilon_{1i}^{\text{in}} - 1} \right) \left( \sigma_{1i}^{\text{lim}} - \sigma_{1i}^{\text{res}} \right) \leftarrow \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{1i}^{\text{Pr.el}} \\ \sigma_{1i}^{\text{lim}} \end{array} \right|_{i++} \cdot \quad (30)$$

Для параболической функции снижения прочности в зоне разупрочнения используем другое интерполяционное уравнение

$$\sigma_1^{\text{act}_n} = \sigma_{1_i}^{\text{lim}} - \left( \frac{\varepsilon_{1_i}^{\text{Pr.el}_n} - \varepsilon_1^{\text{lim}}}{\varepsilon_{1_i}^{\text{in}} - \varepsilon_1^{\text{lim}}} \right)^2 \left( \sigma_1^{\text{lim}} - \sigma_1^{\text{res}} - \varepsilon_1^{\text{lim}} \right) \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^{\text{Pr.el}} \\ \sigma^{\text{lim}} \end{array} \right\}_{i++}, \quad (31)$$

где  $n$  – номер цикла вычислений (итерации),  $\varepsilon_1^{\text{Pr.el}_n}$ ,  $\sigma_1^{\text{Pr.el}_n}$  – текущие расчетные значения максимальных главных деформаций и напряжений на  $n$ -ой итерации.

Для процедуры МНН на первой итерации формируем массив начальных напряжений  $[\sigma^{\text{init}}]$ , содержащий результат вычисления разности между расчетным теоретическим напряжением и фактическим при рассчитанной на текущей итерации теоретической деформации  $\varepsilon_1^{\text{Pr.el}}$ :

$$[\sigma^{\text{init}}]_{i++n++} = \sigma_1^{\text{Pr.el}_n} - \sigma_1^{\text{act}_n} \quad (32)$$

Прирост начальных напряжений для каждого элемента пересчитываем в начальные узловые силы, которые добавляем к массиву сил системы:

$$F^{\text{init}}_{i++j++} = S_{ij} F^T_{j++} \sigma^{\text{init}}_{j++}; \quad F^{xy}_{j++} = F^{xy}_{j++} + F^{\text{init}}_{j++} \quad (33)$$

Прирост деформаций при разупрочнении определяем итерационной процедурой, с помощью которой в дальнейшем расчете используем смещения узлов, произошедшие на предыдущей стадии деформирования путем прибавления дополнительных узловых перемещений для вышедших за предел прочности элементов.

Выполняем проверку схождения расчетных и фактических напряжений

$$\sigma_1^{\text{act}_n} \Leftrightarrow \sigma_1^{\text{Pr.el}_n} \quad (34)$$

Если теоретические и фактические деформации не совпадают с заданной точностью, то выполняем следующую итерацию. Такой расчет приводит к увеличению упругих напряжений на величину меньшую, чем  $\sigma^{\text{init}}$ , поэтому имитационное решение постоянно приближается к фактической диаграмме «напряжение-деформация». Повторение итераций производим до тех пор, пока каждый элемент изучаемой схемы при рассчитанном значении напряжений не будет иметь деформацию, соответствующую его фактической деформационной характеристике. Затем добавленные напряжения вычитаем из рассчитанных напряжений путем обратного перерасчета и получаем фактические напряжения соответствующие фактическим деформациям. Во время выполнения каждой итерации значения главных упругих напряжений ( $\sigma_1^{\text{Pr.el}}$ ,  $\sigma_3^{\text{Pr.el}}$ ) и деформаций ( $\varepsilon_1^{\text{Pr.el}}$ ,  $\varepsilon_3^{\text{Pr.el}}$ ), вычисленные по соотношениям (19), однозначно определяют вид

одной из теоретических деформационных кривых породы на  $n$ -ой итерации (рис. 2) и при совпадении с заданной точностью теоретических и фактических деформаций пород, отражают реальное НДС каждого элемента.

В результате формируем массив осевых фактических напряжений:

$$\sigma^{\text{el act}} = \sigma_i^{x \text{ act}}, \sigma_i^{y \text{ act}}, \tau_i^{xy \text{ act}} \leftarrow \begin{cases} \sigma_i^{x \text{ act}} = \sigma_1^{\text{act}} \cos^2 \alpha_{\sigma}^{xy} + \sigma_3^{\text{act}} \sin^2 \alpha_{\sigma}^{xy} \\ \sigma_i^{y \text{ act}} = \sigma_1^{\text{act}} \sin^2 \alpha_{\sigma}^{xy} + \sigma_3^{\text{act}} \cos^2 \alpha_{\sigma}^{xy} \\ \tau_i^{xy \text{ act}} = 0,5 (\sigma_1^{\text{act}} - \sigma_3^{\text{act}}) \sin 2\alpha_{\sigma}^{xy} \end{cases} \Big|_{i++} \cdot (35)$$

Как известно, образование трещин в горной породе происходит в результате только хрупкого разрушения, которое можно рассматривать на микро- или макроуровне. В отличие от хрупких свойств, пластические свойства пород имеют другую природу и обусловлены «вязкими» связями между дислокациями при сдвиге. При разрушении изотропной породы без выраженной природной трещиноватости развитие систем дополнительных трещин происходит, преимущественно, в направлениях или близких к перпендикулярному максимальным нормальным растягивающим напряжениям в условиях деформации растяжения (трещины отрыва), или по направлению максимальных деформаций сдвига (линий скольжения) в условиях неравнокомпонентного сжатия (трещины скалывания). Трещины отрыва широко распространены над выработанным пространством лав. Трещины скалывания, часто закрытые, в породном массиве вытянуты на большие расстояния и ориентируются в определенной плоскости. Так как дополнительные системы трещин образуются при ведении горных работ, то их параметры зависят от изменения поля напряжений и деформаций. Поэтому они могут быть определены только после определения изменений НДС массива под влиянием горных работ.

В условиях неравнокомпонентного сжатия для оценки ориентации трещин скалывания необходимо построение площадок сдвига (вдоль которых направлены максимальные сдвигающие силы) для каждого элемента расчетной схемы. Ориентировочное изображение линий скольжения было получено в работе [7] из теоретического расчета только упругой области в результате громоздких вычислений с наложением нескольких слоев кальки. В отличие от известных решений, разработанная технология компьютерного анализа позволяет определять линии скольжения в условиях деформационной упругопластической модели среды с разупрочнением и учетом остаточной прочности, а также проводить интерактивный анализ всей исследуемой области по главенствующим структурным дефектам в реальном массиве пород.

Расчет заключается в том, что в результате решения задачи, после исполнения процедуры МНН и вычисления параметров НДС породного массива, по значениям максимальных  $\sigma_1^{\text{Pr.el}}$  и минимальных  $\sigma_3^{\text{Pr.el}}$  главных напряжений, а также касательных напряжений  $\tau^{xy}$  по соотношениям [11, 12] вычисляем ориентацию векторов максимальных главных напряжений для каждого элемента расчетной схемы. В результате вычислений формируем вектор  $\{\alpha_{\sigma}^{xy}\}$ , содержащий

значения углов наклона  $\alpha_{\sigma}^{xy}$  максимального главного напряжения к координатной оси  $x$ :

$$\alpha_{\sigma}^{xy} \leftarrow \alpha_{\sigma_i}^{xy} = \frac{1}{2} \arctg \left( \frac{2\tau_i^{xy}}{\sigma_{1_i}^{Pr.el} - \sigma_i^y} \right) \leftarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma^{el} \\ \sigma^{Pr.el} \end{array} \right|_{i++}, \quad (36)$$

где  $[\sigma^{el}]$  и  $[\sigma^{Pr.el}]$  – массивы текущих значений, соответственно, осевых и главных напряжений, определяемые из выражений (17, 19, 35).

В связи с тем, что механизм пластической деформации связан со сдвигами по площадкам скольжения, то в зоне неупругих деформаций реализация условия предельного состояния происходит на двух площадках [11], наклоненных под углами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  к вектору максимального главного сжимающего напряжения, рис. 3. Так как наличие природных структурных дефектов и структурных неоднородностей свойственно всем горным породам, в модели учтен тот факт, что возникновение новых систем трещин при ведении горных работ и формирование участков разрушения в условиях девиаторного нагружения происходит, в основном, по существующим системам природной трещиноватости и структурным дефектам в породном массиве. В связи этим, введены параметры: угол направления превалирующих структурных дефектов и углы  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , характеризующие степень совпадения направления структурного дефекта с направлениями площадок сдвига.

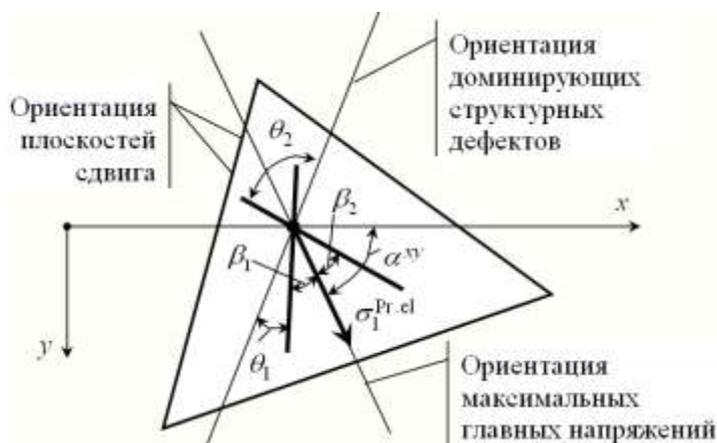


Рис. 3 – Схема к алгоритму определения ориентации магистральных трещин

Для реализации алгоритма визуализации площадок скольжения значения углов внутреннего трения каждого элемента  $\varphi_i$  извлекаем из класса физико-механических свойств модели, затем, путем вычислений, формируем двумерный массив  $[\beta]$ , содержащий значения углов наклона проекций площадок скольжения на плоскость расчетной схемы для каждого элемента:

$$\beta_{1_i}, \beta_{2_i} = \alpha_{\sigma_i}^{xy} \pm \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_i}{2} \right) \left\{ \frac{\alpha_{\sigma}^{xy}}{\text{FMS}_5} \right\}_{i++} \quad (37)$$

В результате расчетов эти площадки в блоке визуализации отображаем в виде дискретных отрезков, по направлению которых действуют максимальные сдвигающие силы. Зная ориентацию систем эндогенных, тектонических и дополнительных трещин можно техническими средствами увеличить сопротивляемость породного массива к произвольным деформациям и управлять нагрузками на крепи выработок.

Выше рассмотрен вопрос вычислительных процедур в области неупругих деформаций итерациями, обеспечивающее получение конечного (время  $t \rightarrow \infty$ ) упругого, упругопластического, упругопластического с разупрочнением и остаточной прочностью решений геомеханической задачи в заданных условиях. Вместе с тем на практике, процесс деформирования не происходит мгновенно, а изменяется в пространстве и во времени, имеет различную интенсивность, постоянно изменяющиеся характеристики зон разгрузки, повышенного горного давления и механических свойств пород. Несмотря на то, что аналитический расчет деформирования во времени сложен и требует сравнения с этапами разрушения реального объекта, при численном анализе предельных состояний массива пород серия последовательных решений, разделенная на группы, может быть представлена как эволюция деформационного процесса во времени.

Выполнение серии решений, моделирующих следующие друг за другом состояния равновесия, представляют собой идеализированный квазистатический процесс. Несмотря на то, что квазистатические процессы напрямую не реализуются в природе, они представляют собой хорошую модель для оценки геомеханических процессов, протекающих достаточно медленно. При мгновенном описании состояния системы, совершающей квазистатический процесс, требуется одинаковое количество параметров, как и для макроскопического описания равновесного состояния. При этом скорость изменения макроскопического параметра, например напряжения  $\sigma_I$  в элементе модели, должна удовлетворять условию [13]

$$t_p |d\sigma_I/dt| \ll |\Delta\sigma_I|, \quad (38)$$

где  $t_p$  – время релаксации,  $\Delta\sigma_I$  – характерный масштаб изменения величины  $\sigma_I$ .

Для определения эволюции состояния породного массива во времени, разработана и реализована технология компьютерного моделирования, которая заключается в многоуровневой дискретизации расчетных схем и вычислительных процедур. Это касается разбивки областей, подобластей и структурных элементов геомеханической модели на локальные более детализированные участки; разделения деформационного процесса на необходимое количество дискретных квазистатических состояний; деления технологических процессов в горных выработках на отдельные операции. Расчеты проводятся путем выполнения серий вычислительных экспериментов для различных этапов ведения горных работ,

которые отражают изменения НДС в разные промежутки времени, но уже с учетом состояния реального массива на конкретном временном интервале.

Технология компьютерного анализа реализована в программном комплексе «ГЕО-РС»<sup>©</sup> [14], который широко апробирован при оценке напряженно-деформированного состояния тектонически нарушенного структурно-неоднородного породного массива и устойчивости подземных выработок.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Турчанинов, И.А. Основы механики горных пород / И.А. Турчанинов, М.А. Иосиф, Э.В. Каспарьян. – Л. : Недра, 1989. – 488 с.
2. Виноградов, В.В. Геомеханика управления состоянием массива вблизи горных выработок. / В.В. Виноградов. – К.: Наук. думка, 1989. – 192 с.
3. Усаченко, Б.М. Свойства пород и устойчивость горных выработок / Б.М. Усаченко. – Киев : Наук. думка, 1979. – 136 с.
4. Галагер, Р. Метод конечных элементов. Основы : пер. с англ. / Р. Галагер. – М. : Мир, 1984. – 428 с.
5. Баклашов, И.В. Механика подземных сооружений и конструкций крепей. / И.В. Баклашов, Б.А. Картозия. – М. : Недра, 1984. – 415 с.
6. Борисов, А.А. Механика горных пород и массивов. / А.А. Борисов. – М. : Недра, 1980. – 360 с.
7. Булычев, Н.С. Механика подземных сооружений. / Н.С. Булычев. – М. : Недра, 1982. – 270 с.
8. Зенкевич, О. Конечные элементы и аппроксимация / О. Зенкевич, К. Морган. - М.: Мир, 1986. - 318 с.
9. Курленя, М.В. Техногенные геомеханические поля напряжений / М.В. Курленя, В.М. Серяков, А.А. Еременко. – Новосибирск : Наука, 2005. – 264 с.
10. Розин, Л.А. Основы метода конечных элементов в теории упругости / Л. А. Розин. – Л. : ЛПИ, 1972. – 79 с.
11. Фадеев, А.Б. Метод конечных элементов в геомеханике. – М.: Недра, 1987. – 221 с.
12. Амусин, Б.З. Метод конечных элементов при решении задач горной геомеханики / Б.З. Амусин, А.Б. Фадеев. - М.: Недра, 1975. - 144 с.
13. Сивухин, Д.В. Общий курс физики. - М.: Наука, 1975. - Т. II. Термодинамика и молекулярная физика. - 519 с.
14. Булат, А.Ф. Разработка компьютерных систем математического моделирования геомеханических процессов / А.Ф. Булат, И.Н. Слащев / Геотехническая механика: Межвед. сб. науч. тр. / ИГТМ им. Н.С. Полякова НАН Украины. – Днепропетровск, 2012. – Вып. 99. – С. 16-27.

**ТЕРМОГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ  
СИСТЕМЫ ПОДЗЕМНОГО АККУМУЛИРОВАНИЯ  
ТЕПЛОВОЙ ЭНЕРГИИ**

На основі аналізу кліматичних умов Західного Донбасу розраховані теплові навантаження, що виникають при опалюванні і охолодженні будівель житлового мікрорайону. За результатами моделювання фільтрації і теплопереносу у водоносних колекторах, що використовуються як сховища теплової енергії, встановлена просторово-часова динаміка формування термальних ореолів при закачуванні та відборі теплоносіїв. Визначена енергетична потужність природних теплоресурсів і економія енергії при використанні підземних вод для тепло- і холодозабезпечення комунального сектора.

**THERMOHYDRODYNAMIC ESTIMATION OF PARAMETERS  
OF SYSTEM UNDERGROUND ACCUMULATION  
OF THERMAL ENERGY**

Thermal loadings, that occurring at heating and conditioning of estate buildings were estimated on the basis of analysis of climatic terms of Western Donbas. Space and time dynamics of thermal aureole forming during injection and pumping of heat transfer has been established according to the results of modeling of flow and heat transport in the aquifer as thermal energy storage. Power and natural energy resources economy was certain due to ground water using warm - and cold of engineering building supply.

**Введение.** Для Украины актуален поиск нетрадиционных способов получения и хранения тепловой энергии. Применяемые в мировой практике [1] для аккумуляции теплоносителей такие типы природных резервуаров, как соляные полости и истощенные углеводородные залежи, не могут рассматриваться как основные ввиду ограниченности их распространения на территории промышленных центров страны. Так, в горно-геологических условиях Донбасса снижение энергетических нагрузок в промышленном и жилищно-коммунальном секторах может быть достигнуто за счет тепло-емкостного ресурса затопленных шахт. Наличие в массивах горных пород зон обладающих герметичностью, большой теплообменной поверхностью и проницаемостью, достаточной для фильтрации жидкого теплоносителя, создают предпосылки для создания в них системы подземного накопления и хранения тепловой энергии.

Аккумулярующие геосистемы предназначены для отопления, горячего водоснабжения и кондиционирования зданий соответственно за счет сохранения летнего тепла и зимнего холода в водоносных коллекторах. Такая система состоит из скважин, через которые с земной поверхности в пласт закачивается вода с температурой, характерной для данного времени года (рис. 1). Одни скважины служат для хранения тепла, другие – холода [2]. Летом вода из "холодных" скважин поступает в систему кондиционирования воздуха и, отдав холод, уже с более высокой температурой закачивается в пласт через "теплые" скважины. Таким образом, по мере подачи холодоносителя потребителю, в пласте