

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВЗАЄМОДІЇ КОНВЕЄРНОЇ СТРІЧКИ З ЖОРСТКИМ БАРАБАНОМ БЕЗ ВРАХУВАННЯ ТЕРТЯ

¹Ларіонов Г.І., ¹Ларіонов М.Г.

¹Інститут геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова НАН України

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КОНВЕЙЕРНОЙ ЛЕНТЫ С ЖЕСТКИМ БАРАБАНОМ БЕЗ УЧЕТА ТРЕНИЯ

¹Ларионов Г.И., ¹Ларионов М.Г.

¹Інститут геотехнічної механіки ім. Н.С. Полякова НАН України

MATHEMATICAL MODELING OF INTERRELATION BETWEEN CONVEYER BELT AND RIGID DRUM WITH NO FRICTION CONSIDERED

¹Larionov G.I., ¹Larionov M.G.

¹Institute of Geotechnical Mechanics named by N. Poliakov of National Academy of Sciences of Ukraine

Анотація. Одним з найбільш ефективних шляхів збільшення тягової спроможності приводу стрічкового конвеєра є підвищення коефіцієнту зчеплення конвеєрної стрічки з поверхнею барабана, що досягається його футеровкою. У дослідженнях, що виконуються в ІГТМ НАН України, не тільки експериментально підтверджено факт передачі тягових зусиль на дузі спокою, а й зроблено припущення про існування крайового шару в зоні контакту. Вирішувалась задача у напруженнях зі змішаними граничними умовами з використанням закону тертя Кулона. Отримані розв'язки, як правило, не задовольняли граничним умовам по переміщенням на поверхні барабану. В роботі зроблена спроба розв'язати систему рівнянь Ламе у циліндричних координатах за умови $h/R \ll 1$ де h товщина стрічки, а R радіус барабана приводу. Використовуючи метод Прандтля та метод підстановок отримано аналітичний розв'язок задачі. Як результат отримані вирази для переміщень на дугах спокою та ковзання. При отриманні довжини дуги спокою використовувалась умова рівності радіальних та окружних переміщень. Використовуючи отримані вирази для розв'язків, отримані вирази для зусиль розтягу. Як було встановлено, зусилля, що прикладені на дугах спокою та ковзання, є однаковими, але протилежно направлені. Ця рівність відображає той факт, що тягові зусилля не передаються на дузі спокою. Отримані результати співпадають з результатами, отриманими М.Є. Жуковським для моделі гнучкої нитки. Факт одночасного задоволення граничним умовам на внутрішній та зовнішній поверхнях стрічки привів до висновку про існування крайового шару стрічки. Отриманий вираз для довжини дуги спокою на барабані за відсутності тертя між стрічкою і барабаном. Графічні залежності переміщень і напружень приведені. Стрибкоподібна поведінка радіальних та окружних напружень може бути пояснена поведінкою переміщень при переході зі сторони дуги спокою до дуги ковзання). Вираз для напружень містить частинні похідні цих переміщень, і ця обставина призводить до стрибків у напруженнях. Наявність стрибків у поведінці окружних та радіальних напружень, при переході від дуги спокою до дуги ковзання, можна пояснити існуванням перехідної зони, у якій виконується зменшення величини стрибків.

. **Ключові слова:** математичне моделювання, стрічка, задача Ламе, дуга спокою

1 Вступ

Одним з найбільш ефективних шляхів збільшення тягової спроможності приводу стрічкового конвеєра є підвищення коефіцієнту зчеплення конвеєрної стрічки з поверхнею барабана, що досягається його футеровкою [1].

Дослідженням у напрямі вивчення процесів взаємодії стрічки з футерованим барабаном присвячено праці багатьох авторів [1 – 6]. Так, О. В. Андрєєв [2], користуючись методами фото пружності, підтвердив існування як дуги ковзання, так і спокою, а також підтвердив передачу зусиль останньою.

Факт передачі зусиль він пояснював депланацією поперечних перетинів стрічки під дією сил розтягу.

Значний внесок у вивчення процесів взаємодії стрічки з футерованим барабаном зроблено науковою школою під керівництвом академіка НАН України В. І. Моссаковського [3; 4]. Так, в [3] футерований барабан моделювався основою Вінклера. В [4] для врахування деформаційних характеристик футеровки основу Вінклера було замінено більш складною основою – Власова – Ціммермана. Однак, як з'ясувалось, у обох випадках при прямованні жорсткості футеровки барабана до нескінченності, що відповідає гладкому твердому барабану, виникає ковзання стрічки по барабану. Крім того, таке рішення приводило до появи стрибків напружень і деформацій, існування яких, у рамках запропонованих моделей, пояснити важко.

В дослідженнях, що виконуються в ІГТМ НАН України, не тільки експериментально підтверджено факт передачі тягових зусиль на дузі спокою [5], а й зроблено припущення про існування крайового шару в зоні контакту [6].

Так, в [6] вирішено задачу про передачу зусиль від футерованого барабана до стрічки з врахуванням наявності крайового шару в ній. Задачу вирішено в напруженнях за наявності змішаних граничних умов на основі закону тертя Кулона. Використання асимптотичної метода Л. Прандтля [7] до врахування існуючого крайового шару дозволило суттєво спростити задачу і отримати розв'язок у замкнутому вигляді. Аналіз отриманого розв'язку дозволив не тільки підтвердити передачу тягових зусиль на дузі спокою, але й пояснити її механізм. Однак спроба з'ясувати факт виконання граничних умов в зоні контактування стрічки і барабана у переміщеннях не дала позитивного результату.

Розв'язок задачі контактної взаємодії жорсткого барабана зі стрічкою у переміщеннях без посилення на закон тертя Кулона дозволить розкрити механізм посиленого зносу стрічок із високомолекулярних матеріалів у яких відсутній вплив крайового шару.

2 Постановка задачі

Пружна та гнучка стрічка (рис. 1) огинає на куті охопту α жорсткий барабан.

Радіус барабана R вважається набагато більшим товщини стрічки h , тобто $h/R \ll 1$. Деформації вздовж напрямних циліндричного барабана вважаємо малими, тобто такими, що ними можна знехтувати. Кут охопту барабана стрічкою ділиться на ділянку прилягання – дугу спокою $0 < \varphi < \varphi^*$ і ділянку ковзання $\varphi^* < \varphi < \alpha$. Барабан обертається у напрямку годинникової стрілки зі сталою кутовою швидкістю. Відлік кутів ведеться від точки набігання $\varphi = 0$.

Система координат для відліку радіальних u та окружних деформацій v має початок у точці $\varphi = 0$ і зв'язана з тілом барабана.

Задача полягає у спрощенні та отриманні розв'язку рівнянь рівноваги у переміщеннях, записаних у циліндричних координатах (рівняння Ламе) для плоского випадку [8]:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} - \mu \left(\frac{u}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) + \mu \Delta u; \quad (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon}{r \partial \varphi} - \mu \left(\frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + \mu \Delta v, \quad (1)$$

де $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}$; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$; λ, μ – константи пружності [8]; r – поточний радіус.

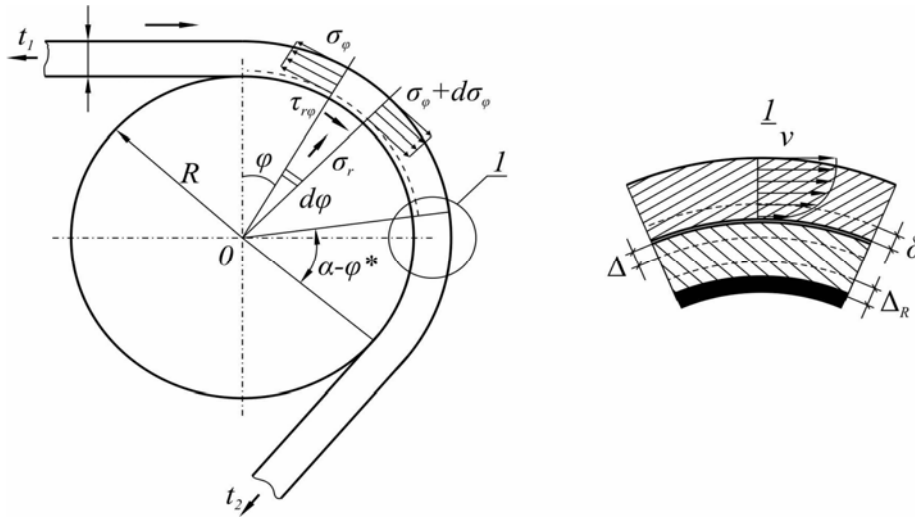


Рисунок 1 - Розрахункова схема задачі

3 Розв’язок задачі

Після оцінки складових системи рівнянь (1) відносно товщини конвеєрної стрічки з врахуванням малості її по відношенню до радіуса приводного барабана $h/R \ll l$ система рівнянь (1) матиме вид:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + (\lambda + \mu) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \varphi} = 0, \quad \mu \left(\frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) = 0. \quad (2)$$

Граничні умови на дузі спокою запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} \text{при } r = R \quad u = v = 0, & \quad \text{при } r = R + h \quad \sigma_r = \tau_{r\varphi} = 0, \\ \text{при } \varphi = 0 \quad \int_R^{R+h} \sigma_\varphi dr = t_1; & \quad \text{при } \varphi = \varphi^* \quad \int_R^{R+h} \sigma_\varphi dr = t_2^*. \end{aligned} \quad (3)$$

Граничні умови на дузі ковзання запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} \text{при } r = R \quad u = 0, & \quad \text{при } r = R + h \quad \sigma_r = \tau_{r\varphi} = 0, \\ \text{при } \varphi = \varphi^* \quad \int_R^{R+h} \sigma_\varphi dr = t_1^*; & \quad \text{при } \varphi = \alpha \quad \int_R^{R+h} \sigma_\varphi dr = t_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Після оцінки виразів для напружень відносно товщини конвеєрної стрічки з

врахуванням малості її по відношенню до радіуса приводного барабана $h/R \ll 1$ отримаємо:

$$\sigma_r = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \sigma_\varphi = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) + 2\mu \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}; \quad \tau_{r\varphi} = \mu \frac{\partial v}{\partial r}.$$

4 Розв'язок задачі на дузі спокою

Користуючись методам підстановки до системи рівнянь (2) з граничними умовами (3) отримаємо розв'язок у вигляді:

$$u = -D_1(\varphi) \ln(r) + D_2(\varphi)r + D_3; \quad v = -\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} D_1^*(\varphi) \ln(r) + C_2(\varphi). \quad (5)$$

Слід зауважити, що у подальшому літерою D будуть позначатися сталі інтегрування. Задовольняючи граничній умові $u=0$ при $r=R$ матимемо:

$$u = D_1(\varphi) \ln(R/r) + D_2(\varphi)(r - R), \quad (6)$$

Задовольняючи граничній умові $v=0$ при $r=R$ матимемо:

$$v = \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} D_1^*(\varphi) \ln(R/r). \quad (7)$$

Задовольнимо тепер другій граничній умові (3) при $r=R+h$ $\sigma_r=0$,

$$u = (R+h) D_2(\varphi) \ln(R/r) + D_2(\varphi)(r - R),$$

$$v = \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} (R+h) D_2^*(\varphi) \ln(R/r), \quad (8)$$

де $D_2^*(\varphi) = \int D_2(\varphi) d\varphi$.

Задовольнимо тепер другій граничній умові (3) при $r=R+h$ $\tau_{r\varphi}=0$.

Оскільки $\tau_{r\varphi} = \mu \frac{\partial v}{\partial r}$, то маємо

$$\tau_{r\varphi} = \mu \frac{\partial v}{\partial r} \Rightarrow -\mu \frac{(\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)} \frac{D_2^*}{r} = 0 \Rightarrow D_2^*(\varphi) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D_2^*(\varphi) = \int D_2(\varphi) d\varphi = 0 \Rightarrow D_1(\varphi) = 0 \quad (9)$$

Оскільки $D_2(\varphi)=0$, то і розв'язок системи (2) стає тривіальним $u=v=0$.

Отже ми не можемо одночасно задовольнити двом граничним умовам при $r=R$, $v=0$ і при $r=R+h$, $\tau_{r\varphi}=0$. Відмовимось від граничної умови при $r=R+h$, $\tau_{r\varphi}=0$ і у подальшому проаналізуємо причини цього явища.

Задовольняючи граничним умовам при $\varphi=0$ та $\varphi=\varphi^*$:

$$\int_R^{R+h} \sigma_\varphi dr = t_1; \quad \int_R^{R+h} \sigma_\varphi^* dr = t_2^* \quad (10)$$

отримаємо:

$$\begin{aligned}\lambda D_2(0)h &= t_1; \lambda D_2(\varphi^*)h = t_2^*; \\ D_2(0) &= \frac{t_1}{\lambda h}; D_2(\varphi^*) = \frac{t_2^*}{\lambda h}.\end{aligned}$$

У першому наближенні прийнемо функцію $D_2(\varphi)$ лінійною:

$$D_2(\varphi) = D_2(0) + \frac{D_2(\varphi^*) - D_2(0)}{\varphi^*} \varphi = \frac{t_1}{\lambda h} + \frac{(t_2^* - t_1)\varphi}{\lambda h \varphi^*} \quad (11)$$

Тоді розв'язок (8) має вигляд:

$$\begin{aligned}u &= \left(\frac{t_1}{\lambda h} + \frac{(t_2^* - t_1)\varphi}{\lambda h \varphi^*} \right) ((R+h)\ln(R/r) + r - R), \\ v &= \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} (R+h) \left(\frac{t_1\varphi}{\lambda h} + \frac{(t_2^* - t_1)\varphi^2}{\lambda h \varphi^*} \right) \ln(R/r) + D_3.\end{aligned} \quad (12)$$

Для визначення сталої D_3 задовольнимо умові $v=0$ при $\varphi=0, r=R$

$$v = \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} (R+h) \left(\frac{t_1\varphi}{\lambda h} + \frac{(t_2^* - t_1)\varphi^2}{2\lambda h \varphi^*} \right) \ln(R/R) + D_3 = 0 \Rightarrow D_3 = 0.$$

Розв'язок (12) має вигляд:

$$\begin{aligned}u &= \left(\frac{t_1}{\lambda h} + \frac{(t_2^* - t_1)\varphi}{\lambda h \varphi^*} \right) ((R+h)\ln(R/r) + r - R), \\ v &= \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} (R+h) \left(\frac{t_1\varphi}{\lambda h} + \frac{(t_2^* - t_1)\varphi^2}{2\lambda h \varphi^*} \right) \ln(R/r).\end{aligned} \quad (13)$$

Перевірка показала, що розв'язок (13) задовольняє і рівнянням (2) і граничним умовам (3), окрім зазначеного.

Вирази для напружень з урахуванням малості товщини стрічки $h/R \ll 1$ і отриманого розв'язку (13) матимуть вид:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \left(\frac{t_1}{\lambda h} + \frac{(t_2^* - t_1)\varphi}{\lambda h \varphi^*} \right) ((\lambda + \mu)(r - (R+h)) - \lambda(R+h)\ln(R/r)), \\ \sigma_\varphi &= \left(\frac{t_1}{\lambda h} + \frac{(t_2^* - t_1)\varphi}{\lambda h \varphi^*} \right) \left(\frac{(\lambda + 2\mu)^2}{\lambda + \mu} \frac{R+h}{r} \ln(R/r) + \lambda \left(1 - \frac{R+h}{r} \right) \right), \\ \tau_{r\varphi} &= -\mu \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \frac{R+h}{r} \left(\frac{t_1\varphi}{\lambda h} + \frac{(t_2^* - t_1)\varphi^2}{2\lambda h \varphi^*} \right).\end{aligned} \quad (14)$$

Слід зауважити, що на поверхні стрічки $r=R+h$ на дузі спокою за умов виконання обмежень на деформування стрічки у окружному напрямку v на поверхні барабана $r=R+h$ дотичні напруження τ не дорівнюють нулю (14).

У випадку ж відсутності таких обмежень дотичні напруження τ дорівнюють нулю на поверхні стрічки $r=R+h$. Графічні залежності переміщень вздовж дуги спокою представлені на рис. 2, а напружень на рис. 3, 4.

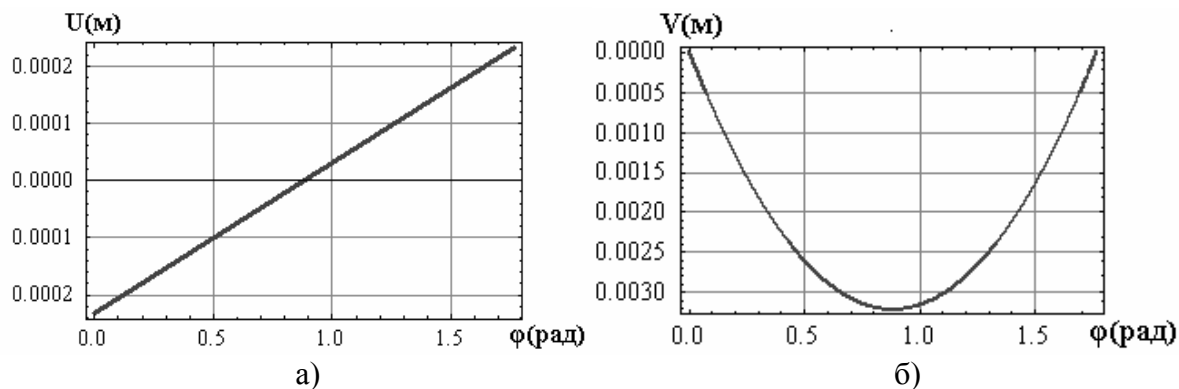


Рисунок 2 - Розподіл переміщень а) радіальних, б) окружних

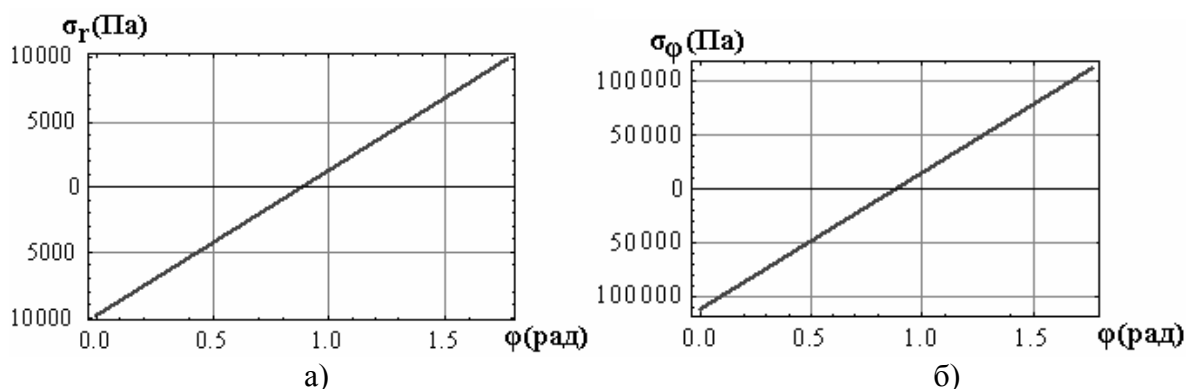


Рисунок 3 - Розподіл напружень а) радіальних, б) окружних

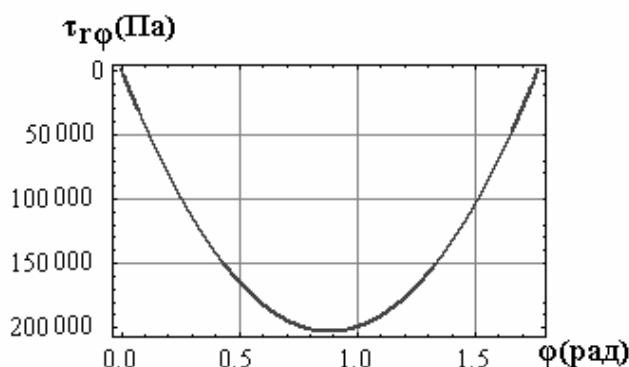


Рисунок 4 - Розподіл дотичних напружень

Для отримання графічних залежностей використано наступні вихідні дані:
 $E_m=1,2 \cdot 10^6$ Па; $\nu=0,4$; $R=0,25$ м; $h=0,0134$ м; $\alpha=\pi$; $\phi_0=\alpha$; $t_2=5000$ н; $t_1=4$ t_2 ;
 $r=(R+h/2)$ м

Розподіл переміщень вздовж радіуса на дузі спокою представлено на рис. 5, а напружень на рис. 6,7.

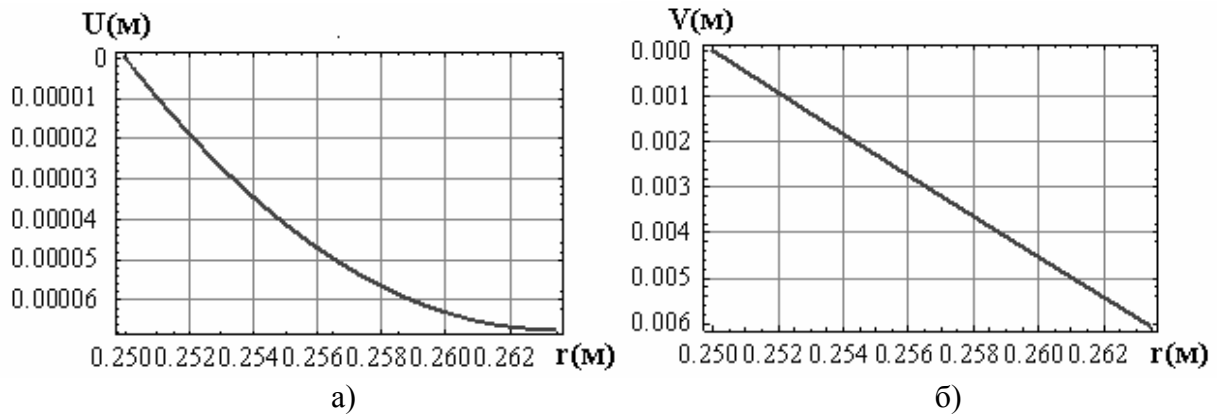


Рисунок 5 - Розподіл переміщень вздовж радіуса ($\varphi = \varphi^*/2$): а) радіальних, б) окружних

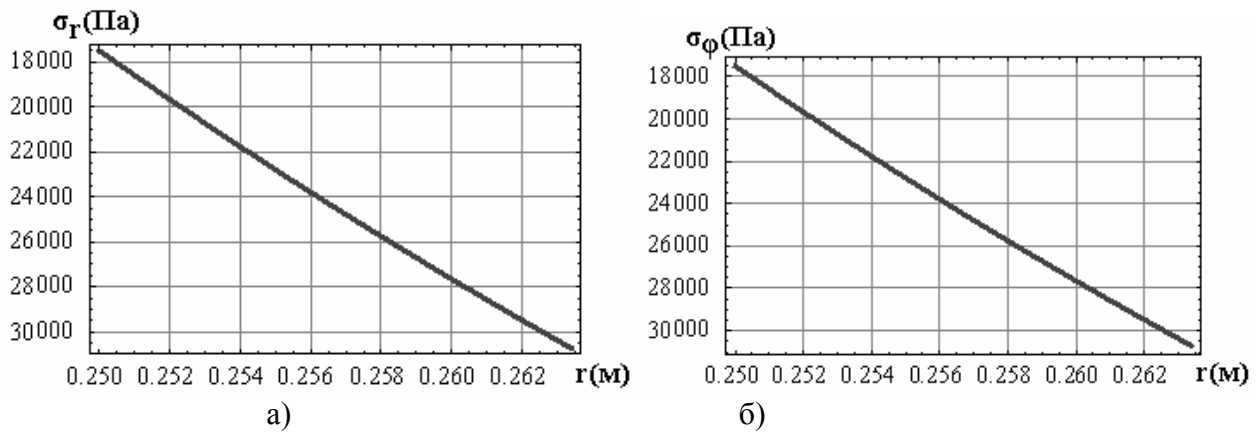


Рисунок 6 - Розподіл напружень: а) радіальних, б) окружних

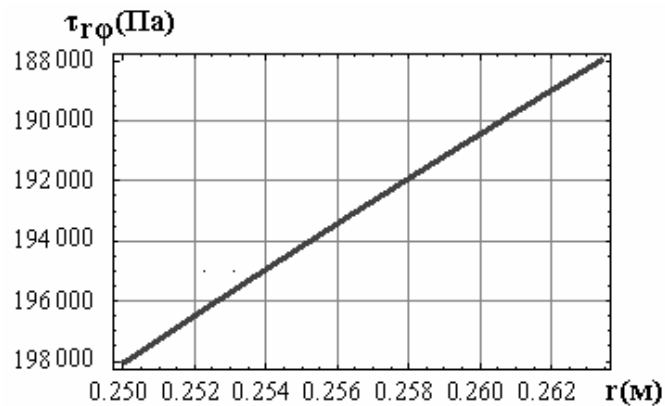


Рисунок 7 - Розподіл дотичних напружень

5 Розв’язок задачі на дузі ковзання

Розв’язок системи рівнянь (2) з граничними умовами (4) представлено нижче:

$$\begin{aligned}
 u_{sl} &= \left(\frac{t_1^*}{\lambda h} + \frac{(t_2 - t_1^*)\varphi}{\lambda h(\varphi_0 - \varphi^*)} \right) (r - R), \\
 v_{sl} &= -\frac{(\lambda + 2\mu)}{\lambda} (R + h) \left(\frac{t_1^* \varphi}{\lambda h} + \frac{(t_2 - t_1^*)\varphi^2}{2\lambda h(\varphi_0 - \varphi^*)} \right) + D_4.
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Для знаходження сталої D_4 задовільнимо умові $v=v_0$ при $\varphi=\varphi^*$ та $r=R$, де

$$v_0 = \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} (R + h) \left(\frac{t_1 \varphi^*}{\lambda h} + \frac{(t_2 - t_1) \varphi^*}{2\lambda h} \right) \ln(R/R) = 0,$$

тоді

$$D_4 = \frac{(\lambda + 2\mu)}{\lambda} (R + h) \left(\frac{\varphi^*}{\lambda h} + \frac{(t_2 - t_1) (\varphi^*)^2}{2\lambda h (\varphi_0 - \varphi^*)} \right).$$

Таким чином (15) можна записати у вигляді:

$$u_{sl} = \left(\frac{t_1^*}{\lambda h} + \frac{(t_2 - t_1^*) \varphi}{\lambda h (\varphi_0 - \varphi^*)} \right) (r - R),$$

$$v_{sl} = \frac{(\lambda + 2\mu)}{\lambda} (R + h) \left(\frac{t_1^* (\varphi - \varphi^*)}{\lambda h} + \frac{(t_2 - t_1^*) (\varphi^2 - (\varphi^*)^2)}{2\lambda h (\varphi_0 - \varphi^*)} \right). \quad (16)$$

Вирази для напружень матимемо у вигляді:

$$\sigma_\varphi = \frac{\lambda^2 r - (\lambda + 2\mu)^2 (R + h)}{\lambda r} \left(\frac{t_1^*}{\lambda h} + \frac{(t_2 - t_1^*) \varphi}{\lambda h (\varphi_0 - \varphi^*)} \right),$$

$$\sigma_\varphi = (\lambda + 2\mu) \left(1 - \frac{(R + h)}{r} \right) \left(\frac{t_1^*}{\lambda h} + \frac{(t_2 - t_1^*) \varphi}{\lambda h (\varphi_0 - \varphi^*)} \right),$$

$$\tau_{r\varphi} = 0. \quad (17)$$

Розподіл переміщень вздовж дуги ковзання та вздовж радіуса представлено на рис. 8 і рис.9 відповідно:

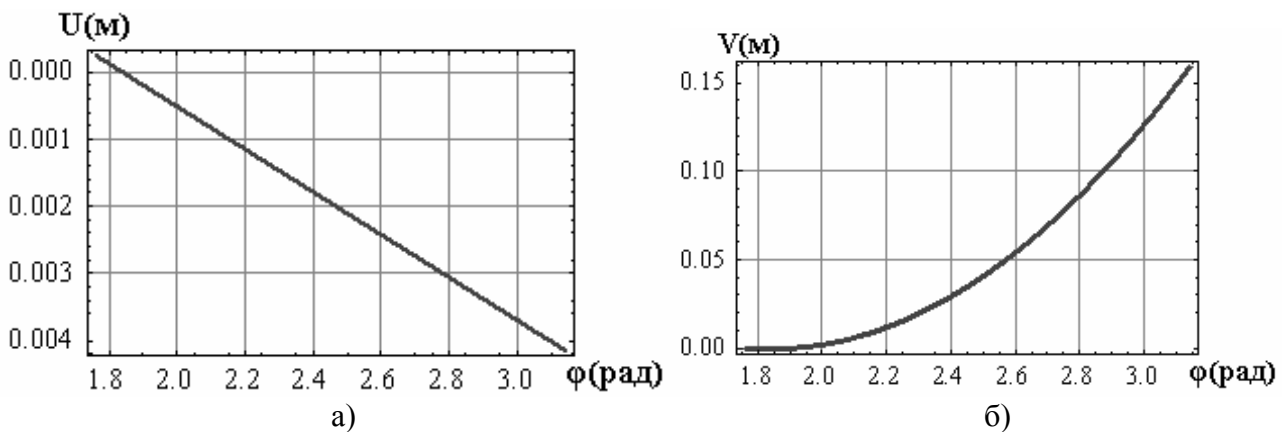


Рисунок 8 - Розподіл переміщень а) радіальних, б) окружних

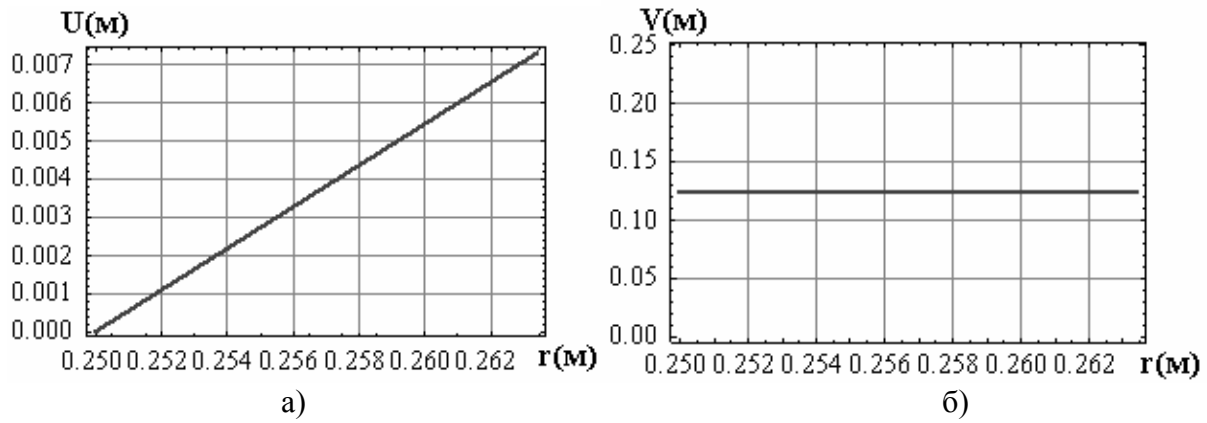


Рисунок 9 - Розподіл переміщень вздовж радіуса ($\varphi=(\varphi_0+\varphi^*)/2$): а) радіальних, б) окружних

Графіки розподілу переміщень на дузі обхвату (спкою і ковзання) представлено на рис.10.

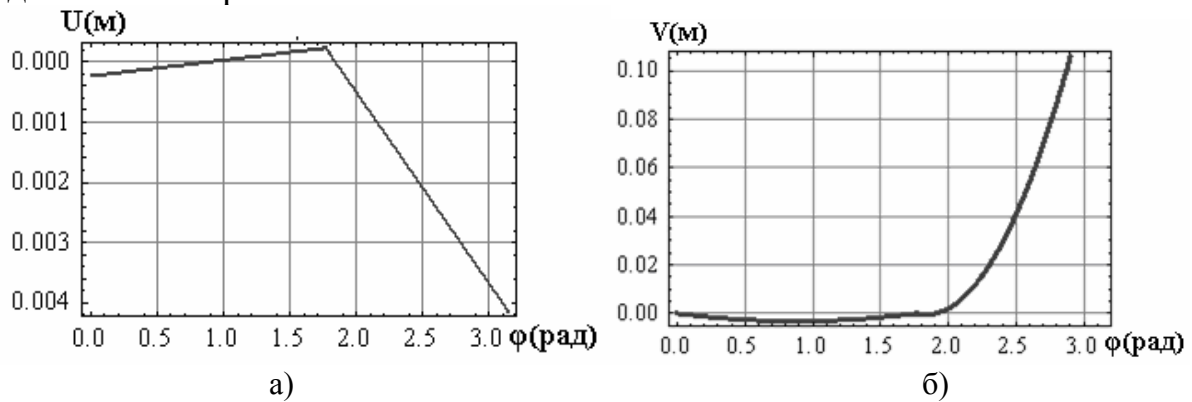


Рисунок 10 - Розподіл переміщень а) радіальних, б) окружних

Слід зауважити, що переважна кількість дослідників формують умови роботи на контактах дуги спкою і ковзання з урахуванням закону тертя Кулона.

Умовою знаходження довжини дуги спкою, як правило [3,4,5], вибирають рівність дотичних напружень на дугах спкою і ковзання $\tau_{r\varphi}^{rest} = \tau_{r\varphi}^{slide}$.

Оскільки задача вирішена у переміщеннях, то і умова про знаходження довжини дуги спкою повинна бути у переміщеннях. Знайдемо границю зони спкою виходячи із умов рівності радіальних і окружних переміщень при $\varphi=\varphi^*$:

$u_{rest}=u_{slide}; v_{rest}=v_{slide}$ при $\varphi=\varphi^*$, або

$$\left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{t_1}{\lambda h} + \frac{(t_2^* - t_1)\varphi}{\lambda h \varphi^*} \right) \left((R+h)\ln(R/r) + r - R \right) = \left(\frac{t_1^*}{\lambda h} + \frac{(t_2 - t_1^*)\varphi}{\lambda h (\varphi_0 - \varphi^*)} \right) (r - R), \\ &\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} (R+h) \left(\frac{t_1\varphi}{\lambda h} + \frac{(t_2^* - t_1)\varphi^2}{2\lambda h \varphi^*} \right) \ln(R/r) = \\ &= \frac{(\lambda + 2\mu)}{\lambda} (R+h) \left(\frac{t_1^*(\varphi - \varphi^*)}{\lambda h} + \frac{(t_2 - t_1^*)(\varphi^2 - (\varphi^*)^2)}{2\lambda h (\varphi_0 - \varphi^*)} \right), \end{aligned} \right.$$

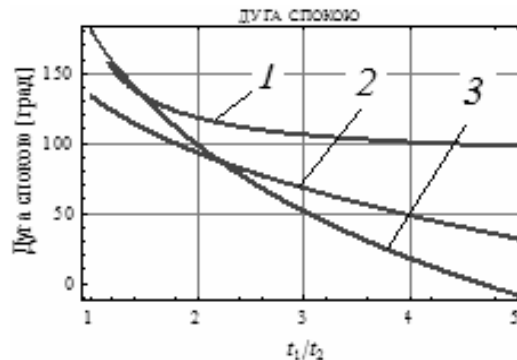
де u_{rest} , v_{rest} , u_{slide} , v_{slide} – переміщення u та v на дугах спокою та ковзання відповідно. Оскільки умови дві то і невідомих повинно бути дві: φ^* та t_2^* . Отримуємо:

$$t_2^* = -t_1,$$

$$\varphi^* = \frac{(t_1/t_2)\varphi_0(2(r-R) + (R+h)\ln(R/r))}{(r-R)(3(t_1/t_2) - 1) + (R+h)\ln(R/r)}.$$

Отримана умова існування дуги спокою у вигляді $t_2^* = -t_1$ відповідає умові існування дуги спокою, яка була отримана М.Є. Жуковським для моделі стрічки у вигляді гнучкої нитки. Рівність тягових зусиль на дузі спокою $t_2^* = -t_1$ означає що на дузі спокою тягові зусилля не передаються. Однак, як доведено теоретично [5], і показано експериментально [6], на дузі спокою зусилля все ж таки передаються. Цей факт можна пояснити лише передачею зусиль у крайовому шарі.

Графічні залежності довжини дуги спокою від відношення сил t_1/t_2 для $\varphi_0 = \pi$ за автором, Кірією Р. В. [5], та М.Є. Жуковським подано на рис. 11.



1 – за авторами; 2 – за Р.В. Кірією; 3 – за М.Є. Жуковським

Рисунок 11 - Довжина дуги спокою від співвідношення сил тяги t_1/t_2 за авторами, Р.В. Кірією та М.Є. Жуковським

6 Висновки

Вирішено задачу про розподіл переміщень і напружень на дузі спокою (2), (3) та ковзання (2), (4).

Задоволення всім граничним умовам (3) призводить до тривіального розв'язку $u = v \equiv 0$. Тобто існує деяке протиріччя між граничними умовами на контактні стрічки з барабаном і на вільній поверхні стрічки. Так, виключення окружних переміщень на контактні стрічки з барабаном призводить до появи дотичних напружень на поверхні стрічки. Але відомо із практики, що вони там відсутні. Залишається зробити висновок, що в стрічці існує деякий шар який і приймає на себе дію дотичних напружень. За цих обставин ліквідовуються протиріччя у граничних умовах на внутрішній і зовнішній поверхнях стрічки, і тоді існуватиме і нетривіальний розв'язок задачі (2), (3). Таким чином, можна припустити існування крайового шару у тілі стрічки, який реалізує дію дотичних напружень. Шар стрічки, за виключенням крайового, знаходиться в умовах простого розтягу – розподіл радіальних і окружних напружень вздовж

дуги спокою носить лінійний характер (рис. 3 а, б). Однак, окружні переміщення (рис. 2 а, б), а рівно дотичні напруження (рис. 4), приймають свої максимальні значення на середині дуги спокою.

Стрибокподібна поведінка радіальних та окружних напружень може бути пояснена поведінкою переміщень при переході зі сторони дуги спокою до дуги ковзання). Вираз для напружень (14), (17) містить частинні похідні цих переміщень, і ця обставина призводить до стрибків у напруженнях.

Наявність стрибків у поведінці окружних та радіальних напружень, при переході від дуги спокою до дуги ковзання, можна пояснити існуванням перехідної зони по φ , у якій виконується зменшення величини стрибків.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Прочность и долговечность горных машин / Украинский заочный политехнический институт. М.;1979. Вып. 5. 303 с.
2. Андреев А. В. Некоторые вопросы физики работы ленточного конвейера // Горные машины и автоматика. Расчет, конструирование, испытания, наладка. М., 1967. С. 224–240.
3. Моссаковский В. И., Рудяков Г.З., Салитренник В.Б. Исследование взаимодействия ленты и упругой футеровки // Горная механика и машиностроение: межвед. сб. науч. тр. М., 1967. Т.18 С. 320–329.
4. Моссаковский В.И., Петров В.В., Салитренник В.Б., Гриневский А.Г. Взаимодействие гибкой конвейерной ленты с одномерно упругой футеровкой барабана // Прикладная механика. 1977. Т.8, №7. С. 90–95.
5. Кирия Р. В., Стаховский Е.А. Экспериментальные исследования взаимодействия упругой ленты с барабаном конвейера // Науковий вісник Національної гірничої академії України: зб. наук. праць. Дніпропетровськ, 2000. №5. С. 24–26.
6. Кирия Р. В., Стаховский Е.А. Применение метода возмущений Л. Прандтля к разрешению парадокса Н. Е. Жуковского // Системні технології. регіональний міжвузівський збірник наукових праць. Дніпропетровськ, 2002. Випуск 4 (21), с. 33-46.
7. Nayfeh Ali Hasan *Perturbation methods*. New York. London. Sydney, Toronto: A Willey-Interscience Publication/John Wiley&Sons, 1976. 450 p.
8. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 1 / Под. ред. д-ра техн. наук И.А. Биргера и чл. Кор. АН Латвийской ССР Я.Г. Пановко. М., Недра, 1963. 831с.

REFERENCES

1. Strength and durability of mine mashine (2979), Ukraine postgraduate polytechnic institute, vol. 5, Moscow, SU.
2. Andreev A.V. (1967), "Some questions of belt conveyor work physics", in *Gornye mashiny I avtomatika. Raschet, konstruirovaniye, ispytaniya, naladka* [Mine machines and automatic .Design and construct, test, maintance] (Ed.), Moscow, SU.
3. Mossakovskiy V.I., Rudjakov G. Z. and Salitrenic V.B. (1967), "Contact belt and elastic drug cover research", *Mine mechanic and machine industry*, Vol.18, pp. 320-329.
4. Mossakovskiy V.I., Petrov V.B., Salitrenic V.B. and Grinevskiy A.G. (1977), "Flexible conveyor belt interaction with one direction elastic drum cover", *Applied mechanic*, Vol.8, no. 7, pp. 90-95.
5. Kiriya R.V. and Stakhovskiy Ye.A. (2000), "Experimental elastic belt and conveyor drum interaction research", *National Mining University: Sat scientific. tr.*, Dnepropetrovsk, no. 5, pp. 24-26 .
6. Kiriya R.V. and Stakhovskiy Ye.A. (2002), "Disturbing method application of Prundtl to eliminate N.E, Zhukovskiy paradox", *Systems Technology: Interagency .Regional Sat Nauchn. tr.* Dnepropetrovsk, Vol. 4(21), pp. 33-46 .
7. Nayfeh Ali Hasan *Perturbation methods*, A Willey-Interscience Publication/John Wiley&Sons, New York. London. Sydney. Toronto, US.
8. *Prochnost, ustoychivost, kolebaniya. Spravochnik v trekh tomakh* [Strength, duarability, vibration. Handbook in 3 books] (1977), N.A. Birger, Ya.G. Panovko (ed.), Vol. 1, Moscow, SU.

Про авторів

Ларіонов Григорій Іванович, доктор технічних наук, старший науковий співробітник відділу механіки гірських порід, Інститут геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова НАН України (ІГТМ НАН України), Дніпро, Україна, igtmlarionov@gmail.com

Ларіонов Микола Григорович, кандидат технічних наук, молодший науковий співробітник відділу геомеханічних основ технології відкритої розробки родовищ, Інститут геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова НАН України (ІГТМ НАН України), Дніпро, Україна, igtmlarionov@gmail.com

About the authors

Larionov Hrihorii Ivanovych, Doctor of Technical Sciences (D.Sc.), Senior Researcher, Senior Researcher in the Rock Mechanics Department, Institute of Geotechnical Mechanics named by N. Poyakov of National Academy of Sciences of Ukraine (IGTM NAS OF UKRAINE), Dnipro, Ukraine igtmlarionov@gmail.com

Larionov Mykola Hrihorovych, Candidate of Technical Sciences (Ph.D.), Junior Researcher of the Department of Geomechanics of Mineral Opencast Mining Technology, Institute of Geotechnical Mechanics named by N. Poyakov of National Academy of Sciences of Ukraine (IGTM NAS OF UKRAINE), Dnipro, Ukraine, igtmlarionov@gmail.com

Аннотация. Одним из наиболее эффективных путей увеличения тяговой способности привода ленточного конвейера является повышение коэффициента сцепления конвейерной ленты с поверхностью барабана, достигаемое его футеровкой. В исследованиях, выполненных в ИГТМ НАН Украины, не только экспериментально подтвержден факт передачи тяговых усилий на дуге покоя, а и сделано предположение о существовании граничного слоя в зоне контакта. Решалась задача в напряжениях со смешанными граничными условиями с применением трения Кулона. Полученные решения, как правило, не удовлетворяли граничным условиям по перемещениям на поверхности барабана. В настоящей работе сделана попытка решить систему уравнений Ламе в цилиндрических координатах при условии $h/R \ll 1$ где h толщина ленты, а R радиус приводного барабана. Применяя метод Прандтля и метод подстановок, получено аналитическое решение задачи. В результате получены выражения для перемещений на дугах покоя и скольжения. При определении длины дуги покоя использовалось условие равенств радиальных и окружных смещений. Используя полученные выражения для решений, получены выражения для растягивающих усилий. Как было установлено, усилия, приложенные на дугах покоя и скольжения, имеют одинаковые, но противоположно направленные усилия. Это равенство означает тот факт, что тяговые усилия не передаются дугой покоя. Полученные результаты совпадают с результатами, полученными Н.Е. Жуковским для модели гибкой нити. Факт одновременного удовлетворения граничным условиям на внешней и внутренних сторонах ленты привел к выводам о существовании краевого слоя ленты. Выражения для длины дуги покоя на барабане без использования условий наличия трения между лентой и барабаном получены. Графические зависимости перемещений и напряжений приводятся. Скачкообразное поведение радиальных и окружных напряжений объясняется поведением перемещений при переходе со стороны дуги покоя к дуге скольжения. Выражение для напряжений содержит частные производные этих перемещений, и это приводит к скачкам напряжений. Наличие скачков в поведении окружных и радиальных напряжений, при переходе от дуги покоя к дуге скольжения, можно объяснить существованием переходной зоны, в которой выполняется уменьшение величины скачков.

Ключевые слова: математическое моделирование, лента, задача Ламе, дуга покоя.

Annotation. One of the most effective methods to increase tractive force of the belt conveyor drive is to increase coefficient of cohesion between the conveyor belt and surface of the drum by way of its lining. The researches performed by the IGTM of the NAS of Ukraine not only experimentally confirmed the fact of transmission of tractive forces on the arc of rest, but also an assumption was made about existence of border layer in the area of the contact. During the researches, a problem of stresses was solved with the mix boundary condition and Coulomb friction low action. As a rule, the obtained solutions did not satisfy boundary conditions on displacements along the drum surface. An attempt was made to solve a system of the Lamé equations in cylindrical coordinates given that $h/R \ll 1$, where h was the belt thickness and R was the drum radius. By applying the Prandtl's technique and substitution methods, an analytical solution was obtain. As a result, the expressions for the displacements on the arc of rest and arc of sliding were obtained. In order to determine length of the arc of rest, the condition of equality of radial and peripheral displacements was used. On the basis of these solutions, the expressions were obtained for the tensile force. As it was established, the forces applied to the arc of rest and arc of sliding were equal in their values but oppositely directed. This equality means that tractive forces are not transferred by the arc of rest. The obtained results are coincided with the results shown by N.E. Zhukovskiy for flexible thread model. The fact of simultaneous satisfaction of boundary conditions both on inner and outer sides belt has led to the conclusion about existence of the belt marginal layer. Expressions were formulated for the length of arc of rest on the drum without using the condition of friction existing between the belt and the drum. In the article, graphic dependences between displacements and stresses are demonstrated. Saltatory behavior of radial and circuitous tensions is explained by dynamics of displacements at transition from the side of arc of rest to the arc of sliding. Expression for tensions contains partial derivatives of these displacements, and it results in jumps of tensions. Presence of jumps in the behavior of circuitous and radial tensions at transition from the arc of rest to the arc of sliding can be explained by existence of transitional area, where size of jumps is decreased.

Keywords: mathematical model, belt, Lamé problem, arc of rest.

Стаття надійшла до редакції 11.11. 2019

Рекомендовано до друку д-ром техн. наук Кірією Р.В.