СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ляв А. Математическая теория упругости. -М.: ОГИЗ, 1935. –537 с.
2. Трантер К.Дж. Интегральные преобразования в математической физике. -М.:ГИТТЛ,1956. –192 с.
3. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. -М.: Наука, 1965. –431 с.
4. Литвиненко С.Ю., Ткач А.А. Распространение упругих волн в стенке полого конечного цилиндра // Методы решения граничных задач и обработки данных. -Днепропетровск: ДГУ, 1989. -С.70-76.
5. Найфэ А. Методы возмущений. -М.: Мир, 1976. –455 с.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ ПРОСЕИВАНИЯ ЭЛЛИПСОИДНЫХ ЧАСТИЦ ЧЕРЕЗ ЩЕЛЕВОЕ СИТО ГРОХОТА

Лапшин Е.С., ИГТМ НАНУ, г. Днепропетровск

При расчете эффективности и производительности грохота со щелевым ситом вероятность просеивания частиц определяется по формуле Годена [1]

$$P_1 = \zeta\left(1 - \frac{D}{L}\right), \tag{1}$$

где ζ - коэффициент живого сечения сита; D - диаметр частицы; L - ширина щели.

Следует отметить, что частицы грохотимого материала имеют чрезвычайно разнообразную форму - особенно широко распространены удлиненные частицы, форма которых аппроксимируется эллипсоидом. В этом случае формула Годена приводит к значительным погрешностям. Целью статьи является разработка аналитического метода расчета вероятности просеивания эллипсоидных частиц через щелевое сито грохота.

Введем систему координат. Щелевое сито образовано длинномерными элементами, расположенными параллельно друг относительно друга. Выделим два соседних элемента. Один из них назовем элемент 1, а другой - 2. Начало оси X поместим в центре элемента 1. При этом ось X сориентируем так, чтобы она была перпендикулярна элементу 1 и проходила через центр элемента 2. Тогда расстояние между элементами 1 и 2, измеренное вдоль оси X, равно ширине щелевого отверстия. Ось Y направим вдоль элемента 1.

Также введем подвижную систему координат x, y, связанную с проекцией частицы на плоскость сита. Оси x и y соответственно совместим с большой и малой осями эллипса.

Положение частицы при падении на сито будем характеризовать координатами x, y центра эллипса и углом φ между осями x и X.

В качестве гипотезы примем, что все значения X, Y и φ одинаково возможны (равновероятны), Следует отметить, что такое допущение общепринято при анализе просеивания сферической частицы,

Используем геометрическую интерпретацию вероятности [2]: вероятность наступления события есть отношение площади S области, благоприятствующей его появлению, к площади всей области S_0 возможных событий.

При падении частицы на сито она либо просеится, либо нет. Вероятность наступления первого события обозначим через P, а второго $\overline{P}$. Оба эти события образуют полную группу, поэтому

$$P + \overline{P} = 1. \tag{2}$$

В нашем случае целесообразнее вначале определить вероятность отсутствия просеивания $\overline{P}$ и лишь на заключительном этапе перейти к P.

Тот факт, что положение частицы равновероятно, позволяет ограничиться рассмотрением X на интервале от 0 до $(L+h)/2$, а φ - от 0 до $\pi/2$, где h ширина элемента. Если учесть, что X и Y независимы, а ширина щели существенно меньше ее длины, то площадь области, на которое возможно падение частицы, будет равна

$$S_0 = \frac{\pi(L+h)}{4}.$$

Для случая, когда большая ось эллипса не превышает ширины щели, условием того, что частица не просеится, является неравенство

$$X < \frac{h}{2} + l(\varphi),$$

где $l(\varphi)$ - половина проекции эллипса на ось X. Интересующее нас событие произойдет, если частица будет находиться в пределах области, площадь которой

$$S = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{h}{2} + l(\varphi) \right] d\varphi.$$

Тогда выражение для вероятности непросеивания частицы принимает вид

$$\overline{P} = \frac{S}{S_0} = \frac{4}{\pi(L+h)} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{h}{2} + l(\varphi) \right] d\varphi. \tag{3}$$

Для вычисления интеграла определим половину проекции эллипса $l(\varphi)$.

Известно [3], что уравнение касательной к эллипсу имеет следующий вид:

$$\frac{x_0}{a^2} x + \frac{y_0}{b^2} y = 1, \tag{4}$$

где x_0 и y_0 - точка эллипса, через которую проходит касательная; x и y - текущие координаты прямой; a и b - большая и малая полуоси эллипса.

Используя параметрическое (ν) представление эллипса

$$x_0 = a\cos\nu, \qquad y_0 = b\sin\nu,$$

уравнение (4) запишем так

$$\frac{\cos\nu}{a} x + \frac{\sin\nu}{b} y - 1 = 0.$$

Или с учетом обозначений

$$A = \frac{\cos\nu}{a}; \qquad B = \frac{\sin\nu}{b}; \qquad C = -1$$

будем иметь общее уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0. \tag{5}$$

Для касательной, записанной в виде уравнения (5), вычислим [3] полярное расстояние

$$\rho = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{6}$$

и полярный угол

$$\sin\alpha = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{7}$$

Учитывая, что полярное расстояние - это длина перпендикуляра, проведенного к касательной эллипса из начала координат, а также то, что полярным углом называется угол между осью x и ρ, приходим к выводу:

$$\rho = l, \qquad \alpha = \varphi. \tag{8}$$

Из (7) с учетом (8) следует

$$\sin\nu = \frac{b}{l}\sin\varphi. \tag{9}$$

Подставляя в (6) соотношение (9), а также принимая во внимание, что $\cos^2\nu = 1 - \sin^2\nu$ получим

$$l = a\cdot\sqrt{1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)\sin^2\varphi}. \tag{10}$$

Если ввести коэффициент сжатия эллипса $c = b/a$, то (10) преобразуется к виду

$$l = a\cdot\sqrt{1 - \left(1 - c^2\right)\sin^2\varphi}. \tag{11}$$

Подставим (11) в зависимость (3). Тогда

$$\overline{P} = \frac{4}{\pi(L+h)}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{h}{2} + a\sqrt{1 - K^2\sin^2\varphi}\right)d\varphi,$$

где $K = \sqrt{1 - c^2}$.

Проинтегрировав [4] , получим

$$\overline{P} = \frac{4}{\pi(L+h)}\left[\frac{\pi h}{2} + aE\left(\frac{\pi}{2}, K\right)\right], \tag{12}$$

где $E\left(\frac{\pi}{2}, K\right)$ - полный эллиптический интеграл второго рода; K - модуль эллиптического интеграла.

Подробные таблицы для вычисления $E\left(\frac{\pi}{2}, K\right)$ приведены в известной монографии [5].

Подстановка выражения (12) в (2) дает

$$P = \frac{L}{L+H}\left[1 - \frac{4a}{\pi L}E\left(\frac{\pi}{2}, K\right)\right].$$

Если ввести обозначения:

$\zeta = \dfrac{L}{L+h}$ - коэффициент живого сечения сита;

$\widetilde{a}=\dfrac{2a}{L}$ - относительный размер эллипсоидной частицы,

то формулу для вычисления вероятности просеивания эллипсоидных частиц окончательно представим в следующем виде:

$$P=\zeta\left[1-\frac{2}{\pi}\widetilde{a}E\left(\frac{\pi}{2},K\right)\right]. \qquad (13)$$

Выражение в квадратных скобках - это максимальная вероятность P_0, которая может быть реализована в случае идеального сита, т.е. при $h=0$ $(\zeta=1)$. Вероятность P_0 характеризует влияние на просеивание сжатия эллипса c и его относительного размера $\widetilde{a}$. Коэффициент ζ служит мерой конструктивного совершенства сита.

Результаты расчета по формуле (13) представлены в таблице.

Таблица – Максимальные вероятности P_0 просеивания эллипсоидных частиц $(\zeta=1)$

c	$\widetilde{a}$			
	0,1	0,5	0,9	1,0
0,0	0,9363	0,6817	0,4270	0,3334
0,1	0,9350	0,6766	0,4179	0,3532
0,2	0,9331	0,6658	0,3984	0,3315
0,3	0,9302	0,6510	0,3718	0,3020
0,4	0,9268	0,6338	0,3408	0,2675
0,5	0,9229	0,6145	0,3061	0,2290
0,6	0,9187	0,5937	0,2687	0,1875
0,7	0,9143	0,5717	0,2290	0,1434
0,8	0,9097	0,5486	0,1875	0,0972
0,9	0,9049	0,5247	0,1444	0,0493
1,0	0,9000	0,5000	0,1000	0,0000

Проанализируем особенности просеивания сферических и эллипсоидных частиц. С этой целью формулу (1) для определения вероятности просеивания сферической частицы представим в таком виде

$$P_1=\zeta(1-\widetilde{a}_1), \qquad (14)$$

где $\widetilde{a}_1=D/L$ - относительный размер сферической частицы.

Формула (13) отличается от (14) тем, что при $\widetilde{a}$ имеемся множитель $2E/\pi$. Оценим его величину. Из таблиц [5] для эллиптических интегралов следует, что при $c<1$ значения E находятся а интервале от 1 до 1,57, из чего можно заключить $2E/\pi<1$. Таким образом, при одном и том же относительном размере $\widetilde{a}=\widetilde{a}_1$ вероятность просеивания эллипсоидной частицы больше, чем сферической. При $c=1$ эллипсоид трансформируется в сферу, и результаты вычислений по формулам (13) и (14) совпадают.

Отметим также и такой факт, что при $\widetilde{a}=\widetilde{a}_1=1$ сферическая частица не просеивается ($P_1=0$), в том время как вероятность такого же события для эллипсоидной частицы в зависимости от коэффициента сжатия составляет 0,0193-0,3532 (см. табл.).

При коэффициенте сжатия равном нулю эллипсоид вырождается о отрезок, который может служить модельным представлением игловидной частицы, В этом случав формула (13) является решением задачи Бюффона [2] о вероятности пересечения случайно брошенного отрезка с параллельными прямыми,

В заключение отметим, что предложенная формула может быть применена и при определении вероятности просеивания лещадных зерен, форма в плане которых близка к эллипсу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вайсборг Л.А., Рубисов Д.Г. Вибрационное грохочение сыпучих материалов: моделирование процесса и технологический расчет грохотов.-Санкт-Петербург: Механобр, 1994. -47 с.
2. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Прикладные задачи теории вероятностей. – М.: Радио и связь, 1983. - 116 с.
3. Выгодский М.А. Справочник по высшей математике. -М.: Наука, 1956. - 872 с.
4. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. –М.: Наука, 1971. -1108 с.
5. Янке И., Эмдэ Ф., Леш Ф. Специальные функции, графики, таблицы. - М.: Наука, 1977. - 344 с.