

ПРОВЕРКА АДЕКВАТНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ВИБРАЦИОННОГО ГРОХОЧЕНИЯ С УЧЕТОМ СЕГРЕГАЦИИ И ПРОСЕИВАНИЯ

На основі теорії марківських ланцюгів подано математичний опис зв'язку середнього терміну поглинання дрібної частки та ймовірності її переходу вниз або вгору по висоті шару сипкого середовища. Порівняння розрахованих та експериментальних даних показало, що математична модель ймовірностей переходів адекватна при таких сполученнях амплітуди та частоти коливань, які здійснюють віброкиплячий режим, що є найбільш важливим у практиці грохочення.

VALIDATION OF THE MATHEMATICAL MODEL FOR ADEQUACY OF VIBRATING SCREENING PROCESS TAKING INTO ACCOUNT SEGREGATION AND SIEVING

On the basis of MarkovChain theory a mathematical description of the relation between the average period of small particle absorption and probability of its travel up and down along the depth of a granular medium layer is presented here. Comparison of the calculated and experimental data has shown that the mathematical model of probability of particle travels is adequate under such combination of amplitude and vibration frequency which realize vibroboiling mode that is more important in the screening practice.

Повышение эффективности работы вибрационных грохотов невозможно без учета и исследования максимального числа факторов, влияющих на сегрегацию и просеивание. Многочисленные публикации, например [1-8], освещают различные аспекты этой проблемы, вместе с тем, роль сегрегации исследована недостаточно.

Существенные результаты получены в рамках выполнения госбюджетной тематики в Институте геотехнической механики НАН Украины [9,10], где обоснован и разработан метод математического моделирования процесса вибрационного грохочения неоднородной марковской цепью, который позволяет учитывать изменение высоты слоя грохотимого материала, интенсивность сегрегации и просеивания. Анализ публикаций [1-8] позволяет сделать следующие основные выводы:

а) при увеличении толщины слоя грохотимого материала значимость сегрегации также возрастает и тем интенсивнее, чем больше разрыхление материала и наличие в нем крупных фракций;

б) все теоретические модели процесса сегрегации содержат ряд неизвестных величин, которыми могут быть коэффициенты, силы, скорости или вероятности. Эти величины предлагается определять экспериментально, что трудоемко и не всегда обеспечивает достаточную точность разработанных математических моделей.

Цель настоящей работы – установление адекватности разработанной модели [9-11] и реального процесса грохочения с учетом сегрегации по высоте слоя сыпучей среды, находящейся под действием вибровозбуждения.

Вероятность прохождения мелкой частицы между крупными определим, аппроксимируя их шарами, диаметр которых равен математическому ожида-

нию (МОЖ) размеров натуральных частиц, а разброс их размеров характеризуется дисперсией и будет учтен на заключительном этапе. В работе [11] показано, что при разрыхлении материала частица перемещается на расстояние λ с вероятностью P_0 , однако наличие сил гравитации приводит к тому, что вероятность перехода частицы d вниз P_n больше вероятности перехода вверх P_g на некоторую величину 2α , т.е.

$$\begin{aligned} P_n &= P_0 + \alpha; & P_g &= P_0 - \alpha; \\ \frac{P_n}{P_g} &= \frac{P_0 + \alpha}{P_0 - \alpha} = \varepsilon; & \alpha &= P_0 \frac{(\varepsilon - 1)}{(\varepsilon + 1)}; \\ P_0 &= \exp\left[-\frac{\pi i_c \lambda (D + d)^2}{4K_p}\right], \end{aligned} \quad (1)$$

где i_c – количество крупных частиц в единице объема в статике; K_p – коэффициент разрыхления

Поскольку события перехода частицы P_n , P_g образуют полную группу, то вероятность остаться в слое Z равна

$$P_{ост} = 1 - P_g - P_n = 1 - 2P_0. \quad (2)$$

Учитывая физический смысл P_g , P_n и P_0 для вероятностей переходов мелкой частицы d при сегрегации, получены следующие соотношения [11]:

$$\pi_{i,i-1} \equiv P_g, \quad \pi_{i,i+1} \equiv P_n, \quad \pi_{i,i} \equiv P_{ост}. \quad (3)$$

Несмотря на то, что вероятности переходов (3) зависят от девяти параметров [11]: i_c , D , d ; H_g , H – высоты слоя грохотимого материала при вибрации и в статике; δ – высота подбрасывания материала; ρ_1 , ρ_2 – плотности мелкой и крупной фракций; λ – длина свободного пробега частицы – все они (кроме λ , которое можно оценить теоретически) сравнительно просто определяются экспериментально.

В работе [12] получена формула, позволяющая вычислять среднюю длину свободного пробега молекулы сорта 1 среди молекул сорта 2

$$\lambda_m = (n_2 \sigma_{1,2} \sqrt{1 + \mu_1 / \mu_2})^{-1}, \quad (4)$$

где $\sigma_{1,2} = \pi(r_1 + r_2)^2$ – эффективное сечение; n_2 – концентрация молекул сорта 2; μ_1 , μ_2 – массы молекул сорта 1 и 2; r_1 , r_2 – радиусы молекул сорта 1 и 2.

Формула (4) получена на основе методов классической механики в предположении, что молекулы (как и наши частицы) – шары, поэтому воспользуемся

ею применительно к нашему случаю. Для этого выразим величины, входящие в (4), через параметры частиц, высоты слоя и порозность

$$\left. \begin{aligned} n_2 &= \frac{6(1 - m_c)H}{\pi D^3 H_e}, \\ \sigma_{1,2} &= \frac{\pi(D + d)^2}{4}, \\ \frac{m_1}{m_2} &= \frac{\rho_1}{\rho_2} \left(\frac{d}{D} \right)^3, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где m_c – порозность грохотимого материала в статическом состоянии.

С учетом изложенного, длину свободного пробега мелкой частицы получим в виде

$$\lambda = \frac{2}{3} \cdot \frac{K_p D}{(1 - m_c)(1 + \tilde{d})^2 \sqrt{1 + \rho_1 \tilde{d}^3 / \rho_2}}, \quad (6)$$

где $\tilde{d} = d / D$ – отношение диаметров мелких и крупных частиц.

Для идентификации вероятностей переходов мелкой частицы при сегрегации установим связь между вероятностями переходов и средним временем поглощения мелкой частицы.

Процесс грохочения с учетом вероятностной природы сегрегации и просеивания описывается стохастической матрицей [10]

$$\begin{pmatrix} \pi_{1,1} & \pi_{1,2} & 0 & \dots & & & & \\ \pi_{2,1} & \pi_{2,2} & \pi_{2,3} & 0 & \dots & & & \\ 0 & \pi_{3,2} & \pi_{3,3} & \pi_{3,4} & 0 & \dots & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ 0 & \dots & 0 & \pi_{n-2,n-3} & \pi_{n-2,n-2} & \pi_{n-2,n-1} & 0 & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \pi_{n-1,n-2} & \pi_{n-1,n-1} & \pi_{n-1,n} & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \quad (7)$$

Когда частица находится в элементарном слое 1, будем говорить, что она находится в состоянии c_1 , в слое 2 – c_2 и т.д. Состояние c_n означает, что частица находится под ситом (поглодилась).

В соответствии с принятой классификацией [13], состояние c_1, c_2, \dots, c_{n-1} не-существенные, а c_n – существенное состояние – поглощение.

Из теории марковских цепей известно [13], что математическое ожидание числа испытаний S_k , которые необходимо произвести для перехода впервые из

несущественного состояния c_{n-1} в существенное c_n , является решением системы алгебраических уравнений

$$S_k = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \pi_{kj} S_j, \quad (k = 1, 2, \dots, n-1). \quad (8)$$

Эксперименты показали, что при толщинах слоя $H_g < 10D$ допустимо предположение о постоянстве вероятностей переходов по высоте слоя, т.е.

$$\left. \begin{aligned} \pi_{12} = \pi_{23} = \pi_{34} = \dots = \pi_{n-3, n-2} = p, \\ \pi_{21} = \pi_{32} = \pi_{43} = \dots = \pi_{n-3, n-4} = q, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где p и q , соответственно, вероятности переходов частицы вниз и вверх.

Учитывая, что вероятности переходов образуют полную группу, то

$$\left. \begin{aligned} \pi_{ii} = 1 - p - q, \\ \pi_{11} = 1 - p, \\ \pi_{n-1, n-1} = 1 - p_{\Pi}, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где p_{Π} – вероятность просеивания ($\pi_{n-2, n-1} \equiv p_{\Pi}$).

Так как в эксперименте по идентификации π_{ij} мелкая частица меньше размера отверстия в сите, имеем

$$\left. \begin{aligned} \pi_{n-1, n-2} = 0, \\ \pi_{n-1, n-1} = 0, \\ \pi_{n-2, n-3} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Система уравнений (8) с учетом (9), (10), (11) и после приведения подобных членов, преобразуется к виду

$$\begin{vmatrix} -p & p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & (-p-q) & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & (-p-q) & p & 0 & 0 \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & q & (-p-q) & p \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & p_{\Pi} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ S_{n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 - p_{\Pi} \end{vmatrix}. \quad (12)$$

Поскольку в эксперименте начальным положением пробной частицы является состояние c_1 , то следует вычислить среднее количество шагов S_1 , которое равно

$$S_1 = \frac{\Delta_k}{\Delta_c}, \quad (13)$$

где Δ_k – определитель Крамера; Δ_c – определитель системы.

Определим время, затрачиваемое на совершение S_1 шагов. Если реализуется режим 1/1, то оно равно

$$t = \frac{S_1}{\nu}, \quad (14)$$

где ν – частота вибрации,
а в случае режима (1, T)/2 имеем

$$t_2 = \frac{2S_1}{\nu}. \quad (15)$$

Таким образом, математически описана связь между средним временем поглощения и вероятностями переходов p и q , которую обозначим $t = f_c(p, q)$. Ее можно использовать двумя способами.

Первый основан на экспериментальном замере среднего времени поглощения мелкой частицы. Имеет место задача: известно t , необходимо определить вероятности p и q . Она решается классическим методом параметрической идентификации. Недостатком такого способа является необходимость проведения большого количества экспериментов для определения среднего времени поглощения. При таком подходе, по сути, выполняется аппроксимация экспериментальных данных.

Второй способ. Использовать полученные зависимости (1), которые позволяют вычислять P_g и P_n . С учетом (9) $P_g \equiv p$, $P_n \equiv q$. В этом случае из эксперимента необходимо определить i_c , D , d , H , H_g и δ . Хотя измеряемых величин больше, но, как показал опыт, затраты на их определение меньше по сравнению с t . Далее по формуле (6) следует рассчитать λ , а затем по (14) и среднее время поглощения. Сравнив его с экспериментальным значением, получим ответ об адекватности модели.

Принципиальное отличие второго способа заключается в использовании физически содержательной математической модели вероятностей переходов, что служит основой для поиска путей в управлении процессом сегрегации. Поэтому приоритет был отдан второму способу.

По экспериментальным данным вычислялось среднее время поглощения при различных амплитудах и частотах вибровозбуждения сита. Полные результаты этих исследований представлены в [14].

Система уравнений (12) решалась с помощью программы MathCad и Excel. Пример сравнения экспериментальных результатов с расчетными показан на рисунке 1.

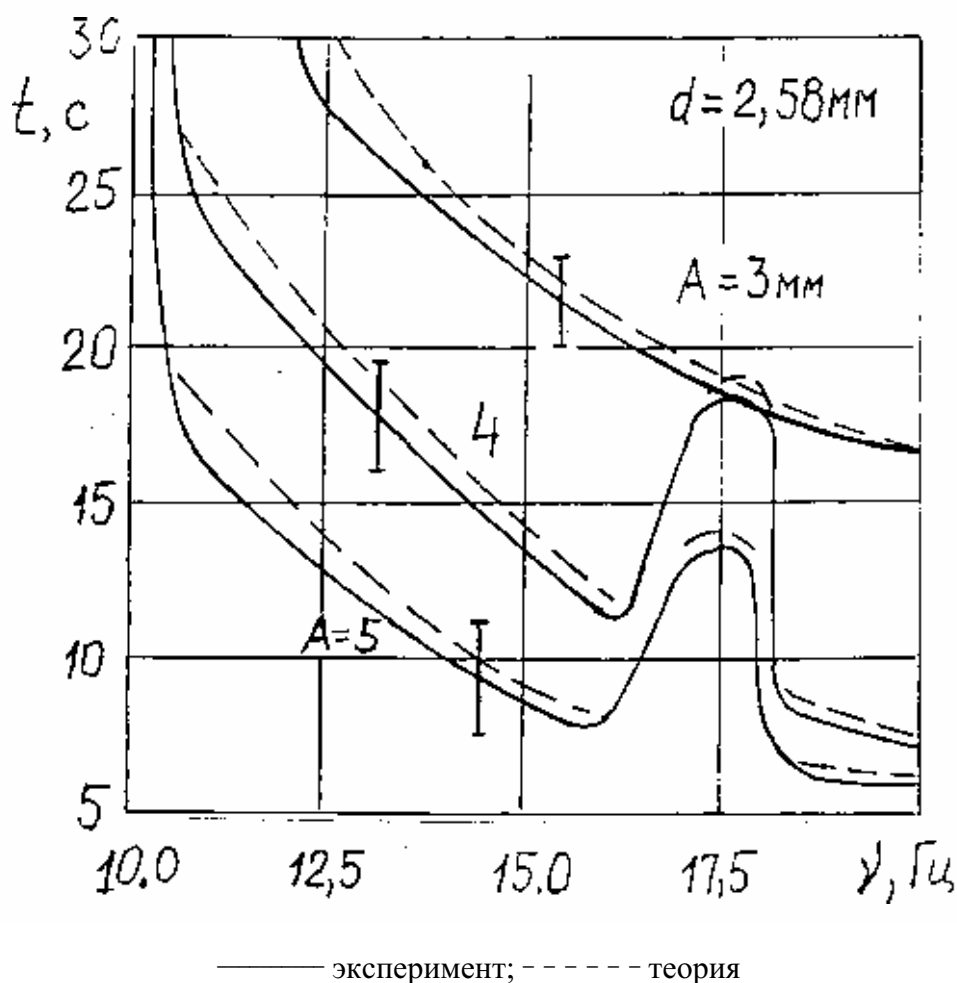


Рис. 1 – Среднее время поглощения при $H = 30 \text{ мм}$; $D = 5,25 \text{ мм}$ и амплитуде колебаний $A = 3 \text{ мм}$, 4 мм и 5 мм

Из сопоставления экспериментальных и расчетных данных следует, что математическая модель вероятностей переходов адекватна при таких сочетаниях амплитуды и частоты, при которых реализуется виброкипящий режим, причем, чем он интенсивнее, тем меньше расхождение между расчетными и экспериментальными значениями. Так, при частоте 20 Гц и амплитудах колебаний $3, 4$ и 5 мм расчетные значения находятся в пределах 95% доверительного интервала, и их отличие от математического ожидания не превышает 15% .

В режиме виброожигения модель не адекватна. Этого и следовало ожидать, поскольку в таком режиме переход мелких частиц происходит по механизму, отличающемуся от описанного ранее. Суть его заключается в уменьшении эквивалентного сухого трения, в результате чего мелкие частицы раздвигают крупные, а не проходят по имеющимся каналам.

Уточнять модель не имеет смысла, ибо при грохочении режим виброожигения не используется, поскольку при нем чрезвычайно низкие технологические показатели.

Итак, математическая модель вероятностей переходов частиц по высоте слоя адекватна в виброкипящем режиме, который наиболее важен в практике грохочения. Полученные результаты могут быть использованы при разработке методики расчета рациональных параметров виброгрохотов и режимов их работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Краснов А.А. Сегрегация зернистого материала при сдвиговой деформации слоя // Исследования процессов, машин и аппаратов разделения материалов по крупности. - Л., 1968. - С. 50-63.
2. Непомнящий Е.А. Расчет показателей процесса грохочения и отсадки // Обогащение руд. - 1963. - №6. - С. 2-23.
3. Непомнящий Е.А. Распределение минеральных частиц разрыхленной смеси // Обогащение руд. - 1966. - №2. - С. 32-35.
4. Блехман И.И., Хайнман В.Я. К теории разделения сыпучих смесей под действием колебаний // Механика твердого тела. - 1968. - №6. - С. 5-13.
5. Блехман И.И., Гортинский В.В., Птушкина Г.Е. Движение частицы в колеблющейся среде при наличии сопротивления типа сухого трения // Механика и машиностроение. - 1963. - №4. - С. 31-44.
6. Гортинский В.В., Демский А.Б., Борискин М.А. Процессы сепарирования на зерноперерабатывающих предприятиях. - М.: Колос, 1980. - 304 с.
7. Тихонов О.Н. Закономерности эффективного разделения минералов в процессах обогащения полезных ископаемых. - М.: Недра, 1984. - 208 с.
8. Учитель А.Д. К анализу процесса сегрегации сыпучих материалов на вибрационных грохотах // Исследование процессов, машин и аппаратов разделения материалов по крупности. - Л., 1988. - С.71-80.
9. Надутый В.П., Лапшин Е.С. Сегрегация сыпучей среды при вибрационном воздействии // Вибрации в технике и технологиях. - 1997. - №3(12). - С. 4-5.
10. Лапшин Е.С. Математическое моделирование процесса грохочения с использованием цепи Маркова // Збагачення корисних копалин. - 1999. - №5(46). - С. 30-34.
11. Надутый В.П., Лапшин Е.С. Кинематика сыпучей среды при вибрационном грохочении // Вибрации в технике и технологиях. - 2003. - №5(31). - С. 51-54.
12. Сивухин Д.В. Термодинамика и молекулярная физика. - М.: Наука, 1990. - 582 с.
13. Вероятность и математическая статистика: Энциклопедия / Гл. ред. Прохоров Ю.В. - М.: БРЭ, 1999. - 910 с.
14. Надутый В.П., Лапшин Е.С., Прокопишин Л.Н. Экспериментальные исследования влияния параметров вибровозбуждения на процесс сегрегации // Сб. науч. тр. "Геотехническая механика". - Днепропетровск: ИГТМ НАНУ. - 2003. - Вып. № 42. - С. 188-194.