УДК 622.4:622.268.1

Инж. Л.А. Новиков,
канд. техн. наук Т.В. Бунько,
канд. техн. наук И.Е. Кокоулин
(ИГТМ НАН Украины)

К ВОПРОСУ АНАЛИЗА ДОСТОВЕРНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ГОРНЫХ ВЫРАБОТОК

Розглянуто питання оцінки погрішності значень аеродинамічних параметрів рудничної атмосфери, отриманих шляхом вимірів та розрахунком. Приведено оцінку погрішності значень величини аеродинамічного опору для окремої гірської виробки, і визначені її статистичні характеристики.

TO A QUESTION OF THE ANALYSIS RELIABILITY OF COAL MINING AERODYNAMIC PARAMETERS DEFINITION

The question of an estimation error for meanings aerodynamic parameters of a miner atmosphere determined by gaugings and a settlement way is considered. The estimation of an error for meanings of size aerodynamic resistance for separate mountain coal mining is made, and also its statistical characteristics are determined.

Как известно, величина аэродинамического сопротивления при расчетах воздухораспределения в функционирующих шахтах и рудниках определяется по известной формуле

$$R = \frac{H}{Q^2}, \tag{1}$$

где H – депрессия горной выработки, кгс/м^2; Q – расход воздуха в горной выработке, м^3/с.

Значения H и Q определяются с помощью приборов для замера соответственно депрессии и расхода воздуха при проведении воздушно-депрессионных съемок. В связи с колебательным характером замеряемых аэродинамических параметров рудничной атмосферы, а также с особенностями приборов и используемых методик проведения замеров, возникают погрешности замеряемых параметров, которые особенно выражены на больших глубинах. При эксплуатации шахт необходимо систематически контролировать состояние действующей вентиляционной сети с помощью депрессионных съемок, так как значения аэродинамических параметров горных выработок носят переменный во времени характер. Хотелось бы отметить то обстоятельство, что после проведения депрессионных съемок на реальной вентиляционной сети, точность полученной информации об аэродинамических параметрах, а также необходимая точность результатов аэродинамических расчетов заметно превышает точности прогноза аэродинамических параметров при проектировании вентиляционной сети. Это связано с отклонениями от проекта при строительстве шахты [1].

Как известно, качественное проведение депрессионных съемок предполагает наличие точной информации о скорости воздушного потока, его расходе через данную площадь поперечного сечения выработки, а также значениях депрессии и температуры. Поэтому большую роль играет чувствительность и возможность используемых при депрессионных съемках приборов, а также их защищенность от влияния таких негативного факторов окружающей среды, как влажность воздуха, его температура и запыленность [2, 3].

Необходимость в оценке погрешностей замеров параметров рудничной атмосферы, обусловлена различными обстоятельствами. Так, например, в работе [4] расчет значений H основывался на результатах замеров абсолютного давления. При этом использовалось уравнение Бернулли применительно к несжимаемой жидкости. Однако экспериментальные исследования показали, что для наклонных, а в особенности для вертикальных выработок, использование уравнения Бернулли может давать значительную относительную погрешность полученного результата расчета величины H от ее реального значения. Данное обстоятельство связано с процессом сжатия воздушного потока при движении его вверх. В той же работе при рассмотрении вопроса о повышении точности определения H и R, исследовался коэффициент аэродинамического сопротивления α. Однако, практические результаты показали, что использование значений α при расчетах H и R нецелесообразно. Это связано со сложностью определения условий, для которых получено данное значение α.

Степень адекватности результатов математического моделирования процессов проветривания, реальной картине, находиться в прямой зависимости от точности значений R, а, следовательно, и замеров H и Q при работе вентиляционной сети.

Будем считать, что аэродинамическое сопротивление выработки определяется по результатам n-го числа измерений (принимаем n=3) из выражения

$$R = \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} R_i \right) \qquad (2)$$

Согласно элементарной теории погрешностей, если нам известна некоторая функция $f\ (x_1,\ldots,x_n)$ и абсолютные погрешности Δa_i (i=1,…,n) значений переменных $x_1,\ldots,x_n$, то абсолютная погрешность функции $f(x_1,..,x_n)$ определяется выражением

$$\left| f(a_1,...,a_n) - f(x_1,...,x_n) \right| \le \Delta f\ , \qquad (3)$$

где $a_1,...,a_n$ - приближенные значения переменных $x_1,\ldots,x_n$.

Выражение для относительной погрешности функции $f(x_1,..,x_n)$ имеет вид

$$\delta(f) = \frac{\Delta f}{\left| f(a_1,...,a_n) \right|} \qquad (4)$$

Абсолютные и относительные погрешности значений переменных $x_1,\ldots,x_n$ определяются соответственно по формулам

$$\left.\begin{aligned}&\Delta a_i = |a_i - x_i|;\\ &\delta(a_i) = \frac{\Delta a_i}{|a_i|}\end{aligned}\right\}$$

Если $f(x_1,\ldots,x_n)$ имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial f(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_i}$, то значение Δf определяется приближенным выражением

$$\Delta \mathrm{f} \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta a_i \cdot \left| f'_{x_i}(a_1,\ldots,a_n) \right| \tag{5}$$

Тогда выражение для относительной погрешности будет иметь вид

$$\delta(f) \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta a_i}{|a_i|} \cdot \left| f'_{x_i}(a_1,\ldots,a_n) \right| \tag{6}$$

Аэродинамическое сопротивление выработки представляет собой функциональную зависимость вида $R_i=f(H_i,Q_i)$. Абсолютные погрешности значений H_i и Q_i будут определяться выражениями: $\left|\overline{H}_i - H_i\right| \le \Delta H_i$ и $\left|\overline{Q}_i - Q_i\right| \le \Delta Q_i$. Соответственно относительные погрешности будут определяться как: $\delta(Q_i) = \frac{\Delta Q_i}{\left|\overline{Q}_i\right|}$ и $\delta(H_i) = \frac{\Delta H_i}{\left|\overline{H}_i\right|}$, где $\overline{H}_i$ и $\overline{Q}_i$ - приближенные значения величин H_i и Q_i. Согласно (3) и (4) для $R_i=f(H_i,Q_i)$, получим

$$\left.\begin{aligned}&\Delta R_i \ge \left|\overline{R}_i - R_i\right|\\ &\delta(R_i) \ge \frac{\Delta R_i}{\left|\overline{R}_i\right|}\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

В частности, первое неравенство в (7) можно переписать в виде

$$\overline{R}_i - \Delta R_i \le R_i \le \overline{R}_i + \Delta R_i$$

Функция $R_i(H_i,Q_i)$ имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial R_i}{\partial H_i}=\frac{1}{Q_i^2}$ и $\frac{\partial R_i}{\partial Q_i}=-\frac{2\cdot H_i}{Q_i^3}$. Кроме того, $H_i>0$ ($H_i=|H_i|$) и $Q_i>0$ ($Q_i=|Q_i|$) Тогда согласно (5) и (6), а, также учитывая, что $\overline{H}_i=|\overline{H}_i|$ и $\overline{Q}_i=|\overline{Q}_i|$, получим

$$\left.\begin{aligned}&\Delta R_i\approx\Delta\overline{H}_i\cdot\frac{1}{\overline{Q}_i^2}+2\cdot\Delta\overline{Q}_i\cdot\frac{\overline{H}_i}{\overline{Q}_i^3};\\&\delta(R_i)\approx\delta(\overline{H}_i)+2\cdot\delta(\overline{Q}_i)\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

С учетом (2) и (8) находим

$$\left.\begin{aligned}&\Delta R=\frac{1}{3}\cdot\left(\sum_{i=1}^{3}\Delta R_i\right);\\&\delta R=\frac{1}{3}\cdot\left(\sum_{i=1}^{3}\delta R_i\right)\end{aligned}\right\}$$

При исследовании ошибок измерений различных приборов и устройств широко используется формула для определения среднеквадратического отклонения функции нескольких случайных аргументов $Y=\varphi(X_1,\ X_2,\ldots,X_n)$ [5]

$$\sigma_y^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2_{m_{x_i}}\cdot\sigma_{x_i}^2+2\cdot\sum_{i\prec j}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)_{m_{x_i}}\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)_{m_{x_j}}\cdot r_{i.j}\cdot\sigma_{x_i}\cdot\sigma_{x_j},$$

где m_{x_i}, m_{x_j} – математические ожидания величин X_i, X_j; σ_{x_j}, σ_{x_j} - среднеквадратические отклонения величин X_i, X_j; $r_{i.j}$ – коэффициент корреляции величин X_i, X_j.

Применительно к $R_i=f(Q_i,H_i)$, получим.

$$\sigma_{R_i}=\sqrt{\left(\frac{1}{Q_i^2}\right)^2_{m_{H_i}}\cdot\sigma_{H_i}^2+\left(-\frac{2\cdot H_i}{Q_i^3}\right)^2_{m_{Q_i}}\cdot\sigma_{Q_i}^2+2\cdot\left(\frac{1}{Q_i^2}\right)_{m_{H_i}}\cdot\left(-\frac{2\cdot H_i}{Q_i^3}\right)_{m_{Q_i}}\cdot\sigma_{H_i}\cdot\sigma_{Q_i}\cdot r_{12}}$$

С учетом выражения (2) и независимости величин R_1, R_2 и R_3 ($r_{ij}=0$), получим

$$\sigma_R = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\sigma_{R_1}^2 + \sigma_{R_2}^2 + \sigma_{R_3}^2}$$

Из математической статистики известно, что для нахождения законов распределения случайных величин на базе результатов опытов необходим большой объем статистических данных. Однако часто приходиться иметь дело с малым числом наблюдений, что связано, как правило, с дороговизной и трудоемкостью постановки опыта.

При определении значения данного параметра на основе малого объема статистических данных, мы имеем дело не с его точным, а с его приближенным значением, называемым оценкой параметра. Оценка неизвестного параметра конкретным числом называется “точечной”.

Необходимо знать точность и надежность оценки рассматриваемого параметра, так как в ряде задач при использовании точечной оценки могут возникнуть существенные ошибки. Для этих целей используют точные методы построения доверительных интервалов I_β для дисперсии D и математического ожидания m. Точный метод построения доверительных интервалов предполагает знание закона распределения случайной величины. В качестве такого закона используют закон распределения Стьюдента с n-1 степенями свободы [5]

$$S_{n-1}(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{(n-1)\cdot\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

где $\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1} \cdot e^{-u} du$ - известная гамма-функция

В нашем случае, произведено три независимых эксперимента над величинами H и Q, в результате чего получены значения H_i и Q_i (i=1 $\div$ 3). По полученным значениям H_i и Q_i определяются значения R_i величины R. Будем считать, что величина R распределена нормально и имеет неизвестные параметры m_R и σ_R. Найдем оценки $\overline{m}_R$, $\overline{D}_R$ и $\overline{\sigma}_R$ параметров m_R, D_R и σ_R и соответствующие им доверительные интервалы I_β с доверительной вероятностью β=0,9.

Руководствуясь приведенными в работе [5] выражениями для $\overline{m}$, $\overline{D}$ и I_β, получим:

$$\left.\begin{aligned} \overline{m}_R &= \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^{3} R_i; \\ \overline{D}_R &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{3} (R_i - \overline{m}_R)^2 \end{aligned}\right\}$$

Согласно таблице значений t_β, удовлетворяющих равенству $\beta=2\cdot\int_0^{t_\beta} S_{n-1}(t)dt$, в зависимости от β и $n\text{-}1$ [5], для n-1=2 и β=0,9 находим t_β=2,92, откуда для ε_β, получим

$$\varepsilon_\beta=t_\beta\cdot\sqrt{\frac{\overline{D}_R}{n}}\approx1{,}686\cdot\sqrt{\overline{D}_R}$$

Тогда доверительный интервал для m_R будет определяться выражением

$$I_\beta=(\overline{m}_R-\varepsilon_\beta;\ \overline{m}_R+\varepsilon_\beta)=(\overline{m}_R-1{,}686\cdot\sqrt{\overline{D}_R}\ ;\ \overline{m}_R+1{,}686\cdot\sqrt{\overline{D}_R}\ )$$

Доверительный интервал для D_R будет определяться по формуле

$$I_\beta=\left(\frac{\overline{D}_R(n-1)}{\chi_1^2};\frac{\overline{D}_R(n-1)}{\chi_2^2}\right),$$

где χ_1^2 и χ_2^2 - значения χ^2 - распределения, имеющего $r=n$-1 степеней свободы. Значения χ_1^2 и χ_2^2 - соответствуют вероятностям $p_1=\frac{1-\beta}{2}$ и $p_2=1-\frac{1-\beta}{2}$.

Имеем β=0,9; α=1-β=0,1; $\frac{\alpha}{2}$=0,05. Согласно таблице значений χ^2 в зависимости от r и p [5] находим при r=2: χ_1^2=5,99 (для p_1=0,05); χ_2^2=0,103 (для p_2=0,95). Тогда для D_R, получим

$$\left.\begin{aligned}&I_\beta=\left(0{,}167\cdot\overline{D}_R;9{,}709\cdot\overline{D}_R\right);\\&0{,}167\cdot\overline{D}_R\prec D_R\prec9{,}709\cdot\overline{D}_R\end{aligned}\right\}$$

Учитывая, что $\sigma_R=\sqrt{D_R}$, для среднеквадратического отклонения σ_R получим

$$\left.\begin{aligned}&I_\beta=\left(0{,}4086\cdot\sqrt{\overline{D}_R};3{,}1159\cdot\sqrt{\overline{D}_R}\right);\\&0{,}4086\cdot\sqrt{\overline{D}_R}\prec\sigma_R\prec3{,}1159\cdot\sqrt{\overline{D}_R},\end{aligned}\right\}$$

Аналогичным образом находятся оценки и доверительные интервалы величин H и Q.

Особенность планирования вентиляции действующих шахт состоит в том, что при построении имитационной модели ШВС прогнозируются аэродинамические параметры вновь создаваемых объектов проветривания. При этом оказывается практически невозможно точно предсказать величину и изменение характеристик, как отдельных элементов, так и модели ШВС в целом. Поэтому исходные данные, используемые в расчетах, могут характеризоваться некоторой погрешностью. Очевидно, полученные с помощью такой модели решения должны быть оценены с точки зрения полученных результатов, т.е. должен быть определен доверительный интервал.

Результат планирования вентиляции обычно представляется в виде некоторых обобщенных показателей, характеризующих изменение состояния изучаемого объекта - вентиляционной системы угольной шахты. Одним из основных показателей, характеризующих состояние ШВС – значение расходов воздуха в объектах проветривания. Этот показатель представляет собой вектор $Q_n=(Q_1, Q_2, \ldots, Q_p)$, координатами которого являются расходы воздуха в объектах проветривания. Очевидно, что вентиляционная система может быть описана набором переменных $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, называемых параметрами системы, представляющими собой исходные данные, использующиеся при расчете обобщенных показателей, в том числе и вектора Q_n. В частности, такими исходными данными могут быть аэродинамические сопротивления источников тяги R, характеристики источников тяги H

Очевидно, что координаты вектора Q_n являются функциями параметров системы, т.е.

$$Q_i=f_i\,(R_1, R_2, \ldots, R_n, H_1, H_2, \ldots, H_k),\ i=1,p,$$

где i – номер объекта проветривания; n- количество ветвей имитационной модели ШВС, k – количество источников тяги, p- количество объектов проветривания.

В неявном виде эти функции описываются системой сетевых уравнений.

Определим погрешность результатов расчета Q_i при известных погрешностях исходных данных.

Обозначая погрешности величин Q_i, R_i , H_i как q_i, r_i , h_i, получим

$$\mathrm{Q_i} + \mathrm{q_i} = \mathrm{f_i}\,(R_1 + \mathrm{r_1},\ R_2 + \mathrm{r_2},\ \ldots,\ R_p + \mathrm{r_n},\ H_1 + \mathrm{h_1},\ H_2 + \mathrm{h_2},\ \ldots,\ H_p + \mathrm{h_n}) \tag{9}$$

Очевидно, что эти функции непрерывны, а, следовательно, и имеют непрерывные частные производные.

Для случая одиночной выработки, примем i=1, тогда $Q_n=Q_1=f_1(R_1,H_1)$. С учетом (9), получим $Q_1=f_1(R_1 + r_1,\ H_1 + h_1)$.

Для исследования поведения функции $f\,(x,y)$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) и вычисления ее значений в данной окрестности с любой степенью точности, часто используют формулу Тейлора, которая записывается в виде

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\cdot\Delta y\right)\cdot f(x_0 y_0)\right]+\theta_{n+1},$$

где $\Delta x=x\text{-}x_0$ и $\Delta y=y\text{-}y_0$ – приращения аргументов x и y; θ_n – остаточный член в формуле Тейлора, характеризующий ошибку вычисления значений функции $f(x,y)$.

Значение θ_n определяется из выражения

$$\theta_{n+1}=\frac{1}{(л+1)!}\cdot\left(\frac{\partial^{(m+1)+(n+1)}f(x_0+\lambda\cdot\Delta x, y_0+\lambda\cdot\Delta y)}{\partial x^{m+1}\partial y^{n+1}}\cdot\Delta x^{m+1}\cdot\Delta y^{n+1}\right),$$

где λ- некоторое положительное число, для которого справедливо неравенство:

$0<\lambda<1$; $\Delta x=x\text{-}x_0$ и $\Delta y=y\text{-}y_0$ – приращения аргументов x и y.

Для функции $Q_1=f_1\,(R_1+r_1, H_1+h_1)=\sqrt{\frac{H_1+h_1}{R_1+r_1}}$, получим

$$\left.\begin{aligned}
&f_1(R_1+r_1, H_1+h_1)=\left[\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{n!}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial R_1}\cdot r_1+\frac{\partial}{\partial H_1}\cdot h_1\right)\cdot f_1(R_1,H_1)\right]+\theta_{m+1};\\
&\theta_{m+1}=\frac{1}{(m+1)!}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial R_1}\cdot r_1+\frac{\partial}{\partial H_1}\cdot h_1\right)^{m+1}\cdot f_1(R_1+\lambda\cdot r_1, H_1+\lambda\cdot h_1)
\end{aligned}\right\}$$

Результат разложения функции $Q_1=f_1\,(R_1+r_1, H_1+h_1)$ в ряд Тейлора в окрестности точки (R_1, H_1) с точностью до второго порядка аппроксимации (m=2) имеет вид

$$\left.\begin{aligned}
&f_1(R_1+r_1,H_1+h_1)=\sqrt{\frac{H_1}{R_1}}+\frac{1}{2\cdot R_1}\left(h_1\cdot\sqrt{\frac{R_1}{H_1}}-r_1\cdot\sqrt{\frac{H_1}{R_1}}\right)+\frac{1}{8R_1^2}\cdot\begin{pmatrix}3\cdot r_1^2\cdot\sqrt{\frac{H_1}{R_1}}-h_1\cdot\sqrt{\frac{R_1}{H_1}}-\\-2\cdot h_1\cdot r_1\cdot\sqrt{\frac{R_1}{H_1}}\end{pmatrix}+\\
&\frac{r_1}{16\cdot R_1^3}\cdot\left(3\cdot r_1\cdot h_1\cdot\sqrt{\frac{R_1+\lambda\cdot r_1}{H_1+\lambda\cdot h_1}}-5\cdot r_1\cdot H\sqrt{\frac{H_1+\lambda\cdot h_1}{R_1+\lambda\cdot r_1}}-h_i^2\cdot\sqrt{\left(\frac{R_1+\lambda\cdot r_1}{H_1+\lambda\cdot h_1}\right)^3}\right)
\end{aligned}\right\}$$

При m-м числе замеров значений R_{1j} u H_{1j} ($j=1\div m$) мы получим совокупность расчетных значений Q_{1j}. Тогда $Q_1=f(Q_{11}, Q_{12,\dots}Q_{1m})=\frac{1}{m}\cdot\sum_{j=1}^{m}Q_{1j}$.

Полученные в (8) выражения для ΔR_i и δR_i применительно к отдельно взятой выработки, показывают, что наибольшее влияние на точность расчета величины R_i оказывают значения погрешности величины Q_i. Причем, значения погрешности Q_i находятся в прямой зависимости от значений погрешности определяемых параметров: скорость воздуха V_i, площадь поперечного сечения выработки S_i. Эти параметры в свою очередь соответственно зависят от точности используемых анемометров и средств замеров.

Особое внимание нужно уделять погрешности величины S_i, так как значения S_i в основном определяются с помощью простых средств замеров, имеющих низкую точность, а также с помощью различных эмпирических формул, которые не учитывают в должной мере конфигурацию сечений горных выработок. Существующие же методы для измерения площади сечения выработки либо требуют значительных затрат времени на замер, либо отличаются значительной дороговизной.

Приведенные выше формулы для определения абсолютной и относительной погрешности величины R_i, а также выражения, позволяющие определять точность и надежность оценки рассматриваемого параметра, могут быть использованы при анализе достоверности определения аэродинамических параметров рудничной атмосферы, а также при моделировании процессов воздухораспределения применительно к вентиляционной сети.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрамов Ф.А., Тян Р.Б., Потемкин В.Я. Расчет вентиляционных сетей шахт и рудников. М., «Недра», 1978. – с. 79.

2. Перепелица В.Г., Панов Н.С. Депрессионные съемки шахт и контроль рудничной вентиляции // Геотехническая механика: Межвед. зб. Науч. трудов / Ин-т геотехнической механики НАН Украины. – Днепропетровск. – 2004. – Вип. 48. – С. 61-66 .

3. В.Ш. Берикашвили., М.В. Хиврин. Волоконно-оптические системы контроля атмосферы угольных шахт. – М.: Радиотехника. – 2001. – №5.– С. 27.

4. Мустель П.И. Рудничная аэрология. М., «Недра», 1970.

5. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: Учеб. для вузов. М.: Выш. шк., 2001. – с. 255-257.