УДК 539.3

Кобец А.С., Дырда В.И.

НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ ПРОЧНОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ СИСТЕМ

Розглядаються деякі задачі міцності вязкопружних матеріалів типу гуми при тривалих циклічних навантаженнях: розглядається характер розподілу термомеханічних полів, полів напруги і деформацій.

SOME PROBLEMS OF STRENGTH OF NONLINEAR VISCO-ELASTIC SYSTEMS

Some problems of strength of visco-elastic materials such as gum are observed at the long-lived cyclic loadings: character of allocation of thermomechanical fields, stress fields, and strains is observed.

В современных машинах в качестве эластичных звеньев все чаще применяется резина. Виброизоляторы, компенсаторы перекосов и неточностей сборки, уплотнения, демпферы, износостойкие элементы – это далеко не полный перечень изделий, в которых резина адекватно не может быть заменена ни одним из конструкционных материалов. Значительный интерес вызывает применение резины в качестве рабочих органов машин агропромышленного комплекса для уборки, например, ботвы кормовой свеклы [1, 2]. Такие эластичные ботвоудаляющие рабочие органы работают в довольно сложных условиях, зачастую при циклических нагрузках.

Ниже рассматриваются некоторые важные задачи применительно к расчету таких деталей для случая, если материал обладает нелинейными свойствами.

Пусть тело занимает область V, ограниченную поверхностью S. Предположим, что на части поверхности S_σ заданы нагрузки, а на части S_u – перемещения. Тогда математическая постановка задачи определения НДС нелинейно-вязкоупругих тел (имеется в виду физическая нелинейность, связанная с формоизменением и объемным деформированием) имеет вид

$$\widetilde{\sigma}_{ij,j} + \widetilde{b}_i + \rho\omega^2 \widetilde{u}_i = 0\,; \tag{1}$$

$$\overline{\sigma}_{ij,j} + \overline{b}_i = 0\,; \tag{2}$$

$$\widetilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\widetilde{u}_{i,j} + \widetilde{u}_{j,i}\right); \tag{3}$$

$$\overline{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\overline{u}_{ij} + \overline{u}_{ji}\right)$$

$$\widetilde{\sigma}_{ij} = 2\widetilde{G}\left(\widetilde{\varepsilon}_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\widetilde{\varepsilon}_{kk}\delta_{ij}\right); \tag{4}$$

$$\widetilde{S}_{ij} = 2\widetilde{G}\widetilde{e}_{ij}, \quad \widetilde{\sigma} = 3\widetilde{K}\widetilde{\varepsilon}_0; \text{ в } \quad V, \quad t > 0 \tag{5}$$

$$\overline{S}_{ij} = 2\overline{G} \cdot \overline{e}_{ij} \quad \overline{\sigma} = 3\overline{K}\overline{\varepsilon}_\theta; \tag{6}$$

$$c\dot{\overline{\theta}} = (k \cdot \theta,_i),_i + r + D'_m; \tag{7}$$

$$\widetilde{\sigma}_{ij}n_j = \widetilde{t}_{0i}; \quad \overline{\sigma}_{ij} = \overline{t}_{0i}; \text{ на } \quad S_\sigma \tag{8}$$

$$\widetilde{u}_i = \widetilde{u}_{0i}, \quad \overline{u}_i = \overline{u}_{0i}; \text{ на } \quad \mathrm{S_u}, t > 0 \tag{9}$$

$$-k\theta,_i \cdot n_i + \gamma(\theta - \theta_0) = 0 \text{ на } \quad \mathrm{S}' \tag{10}$$

$$\theta = \theta_0(\vec{x}), \text{ â } \quad V, \quad t = 0 \tag{11}$$

где

$$\vec{b}(\vec{x},t) = \bar{\vec{b}}(\vec{x},t) + \vec{b}(\vec{x},t)\cos\omega t - \vec{b}''(\vec{x},t)\sin\omega t, \tag{12}$$

$$\vec{u}_0(\vec{x},t) = \bar{\vec{u}}_0(\vec{x},t) + \vec{u}'_0(\vec{x},t)\cos\omega t - \overline{u}''_0(\vec{x},t)\sin\omega t. \tag{13}$$

Индекс $(\bar{\bullet})$ соответствует постоянным составляющим механических полей.

Выше приняты следующие обозначения: $\sigma(\sigma_{i,j})$ – тензор напряжений; $\varepsilon(\varepsilon_{i,j})$ – тензор деформаций; $\vec{u}(x,t)$ – вектор перемещений в декартовой системе координат (x_i), $i = 1, 2, 3$; $\vec{x}$ – координаты точки; t – время; b_i – компоненты вектора объемных сил; ρ – плотность; r – плотность внутренних источников тепла; $\vec{n}$ – вектор теплового потока; S – история деформации; θ – температура; $\widetilde{G}$, $\widetilde{K}$ – сдвиговый и объемный модули; V – область, ограниченная поверхностью S' с внешней нормалью $\vec{n}$, $n = (n_i)$; c – коэффициент теплопроводности; D'_m – внутренняя механическая диссипация; $\vec{t}_0(\vec{x},t)$ – вектор нагрузки, заданный на части поверхности S_σ; $\widetilde{u}_{oi}$ вектор перемещений, заданный на части поверхности S'_u; θ_0 – начальное распределение температуры в теле объемом V; γ – коэффициент теплоотдачи.

Сдвиговые G и $\widetilde{K}$ объемные модули зависят в общем случае от полного набора девяти аргументов, а в случае простого деформирования – от четырех аргументов.

Зависимость модулей и диссипативной функции от амплитуды нагружения, деформации и температуры делает граничную задачу (1-13) нелинейной. Для ее реализации разработано два подхода [3].

Ниже использован подход, использующий идею метода переменных параметров упругости (МПП) [3]. Он применим как к нестационарной, так и к стационарной формам уравнения теплопроводности.

Элементарная итерация включает решение линейных задач вязкоупругости и теплопроводности, причем для линеаризации задачи на i-ой итерации в температурно-амплитудно-зависимых характеристиках используются значения параметров, вычисленных на (i-1)-ой итерации.

Линейная задача, возникающая на каждой итерации, решается МКЭ. С целью повышения эффективности расчетов, а также более точного описания криволинейных границ тела принят восьмиузловой изопараметрический четырехугольный конечный элемент. В пределах каждого из них амплитуды перемещений и температура аппроксимируются по квадратичному закону. При реализации МКЭ для определения узловых компонент вектора перемещений получаем систему линейных алгебраических уравнений, которая решается методом Гаусса; для определения узловых значений температуры получаем систему дифференциальных уравнений первого порядка относительно времени. Для описания температурной зависимости физико-механических характеристик материала используется кусочно-линейная аппроксимация экспериментальных данных, представленных в табличной или графической форме.

Достоверность расчетов контролируется сопоставлением данных, получаемых на различных конечно-элементных сетках и шагах во времени. В качестве допустимой принимается погрешность 3-5 % относительно максимальной по объему тела температуры.

Анализ термомеханического поведения и очагов разрушения линейно-вязкоупругих тел. Анализ термомеханического поведения и очагов разрушения нелинейно-вязкоупругих тел производится путем конкретизации модели (1-13) с использованием указанных выше методов.

Рассмотрим конкретно случай циклического нагружения. Анализ литературных источников показывает, что, несмотря на принципиальную возможность экспериментальной конкретизации модели (1-13), данные о зависимостях сдвигового и объемного модулей накопления и потерь от линейного и квадратичного инвариантов практически отсутствуют. Современное состояние вопроса отражено наличием нескольких потенциалов упругого поведения [4, 5] и единичными работами, по диссипативных характеристикам к форме амплитудной зависимости модулей материала при сдвиге или растяжении. Практически отсутствуют также данные, относящиеся к объемным потерям, а также влиянию линейного инварианта (т.е. объемного сжатия) на сдвиговые потери. В этой связи для получения качественных и количественных оценок эффектов нелинейности проведена конкретизация модели на основании имеющихся неполных данных и обоснованных допущений.

Таким образом, принимаем: сдвиговой и объемный модули накопления не зависят от частоты и определяются упругим потенциалом; тангенс угла объемных потерь δ_K пропорционален тангенсу сдвиговых потерь δ_G. В последнем случае естественно рассматривать три варианта: объемное деформирование осуществляется упруго $\left(\widehat{K}'' = 0,\, \delta_K = 0\right)$; коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона) является вещественной величиной $\left(\nu'' = 0,\, \delta_K = \delta_G\right)$; величины δ_K и δ_G пропорциональны с коэффициентом χ, $\delta_K = \chi\delta_G$, $\chi = \text{const}$.

При сделанных предположениях достаточно легко реализуется техника вычисления модулей накопления на основе нелинейно-упругих моделей типа [4, 5], определяемых потенциалами упругоподобной реакции. При этом используются методы эквивалентной линеаризации, двойные полиномы по функциям Лежандра $P_n(x)$; для вычисления двойных интегралов применяются квадратурные формулы Гаусса. Для аппроксимаций функций $\widehat{G}$ и $\widehat{K}$ использованы разложения десяти функций $P_n(x)$, а при вычислении коэффициентов – шестнадцатиточечная кубатурная формула. Погрешность аппроксимации (в интервале линейного e_{0u} и квадратичного $\hat{\in}_0$ инвариантов соответственно 0,5 и 0,05) не превышает 1 %.

При конкретизации диссипативных свойств использованы экспериментальные результаты работы [6], представленные зависимостью коэффициента поглощения при сдвиге от интенсивности деформации

$$\psi_G = 2\pi\widehat{G}''/G' . \tag{14}$$

Для модулей сдвиговых и объемных потерь принимаем

$$\widehat{G}''\left(e_{0u}, \hat{\in}_0\right) = 2\pi\widehat{G}'\left(e_{0u}, \hat{\in}_0\right)/\psi_G\left(e_{0u}\right), \tag{15}$$

$$\hat{K}'' = \chi\delta_G\hat{K}'', \quad \delta_K = \chi\delta_G , \tag{16}$$

где $\chi = \text{const}$.

Соотношения (16) являются вполне естественными при описании эффектов объемных потерь в условиях ограниченности экспериментальных данных. Они согласуются с оценкой $\chi \approx 0{,}23$, которая получена в [7] для ряда полимеров.

Сформулированные выше гипотезы в сочетании с экспериментальными данными по упругому поведению материала и коэффициенту сдвиговых потерь позволяют определить параметры модели, приемлемой для качественной и количественной оценки эффектов нелинейности при циклическом деформировании вязкоупругих тел.

Полученные результаты использованы для исследования термомеханического поведения очагов разрушения в телах, ограниченных поверхностями с угловыми точками. Для элементов конструкций типа виброизоляторов в таких точках происходит смена типа граничных условий, и имеют место особенности в компонентах НДС.

Проведено исследование решений соответствующих линейных и нелинейных задач. При этом получены следующие результаты.

Установлено подобие таких инвариантных характеристик НДС как максимальные нормальные и касательные напряжения, интенсивность напряжения и функция скорости диссипации. Показано, что коэффициент подобия выражается через скалярную интегральную характеристику – коэффициент жесткости.

Таким образом, эффект нелинейного масштабирования может быть использован для вычисления локальных значения параметров напряженного состояния и диссипации по решению соответствующей линейной задачи и значению интегральной характеристики нелинейного состояния – коэффициента жесткости. При этом отпадает необходимость исследования локальных характеристик в рамках нелинейной задачи, а нелинейность учитывается посредством интегрального параметра, достаточно точно вычисляемого на грубых сетках. При этом указанный параметр, как установлено [3], может быть весьма точно вычислен вообще без решения нелинейной задачи.

Анализ решения нелинейной задачи показывает, что для вязкоупругих тел, обладающих развитой свободной поверхностью, энергия объемного деформирования существенно меньше энергии формоизменения. Пренебрежение эффектами объемной нелинейности не приводит к изменению значений компонент напряжений и деформаций более, чем на 1 % во всей области, занимаемой телом, за исключением весьма малых окрестностей угловых точек.

На примере ограниченного по торцам цилиндра рассчитаны очаги разрушения, отвечающие различным критериям прочности. Для рассматриваемого тела очаги ассоциированы с поверхностью локальных максимумов вблизи угловых точек. Показано, что при мягкой нелинейной характеристике жесткостных параметров (модулей накопления) материала линейная постановка предсказывает при кинематическом возбуждении завышенные напряжения, а при сильном нагружении – заниженные деформации. Эти обстоятельства необходимо учитывать при использовании соответственно силовых и деформационных критериев разрушения материала.

При использовании диссипативного критерия эффекты физической нелинейности определяются типом нелинейной зависимости моделей (податливостей) потерь от инвариантов тензоров деформации или напряжений. Например, при кинематическом возбуждении в случав мягкой характеристики для модуля сдвиговых потерь линейная теория завышает уровень диссипации, а в случае жесткой характеристики – занижает.

Выводы

Полученные результаты показывают, что прочность вязкоупругих тел, т.е. характер распределения термомеханических полей, полей напряжений, деформаций и температур, а, следовательно, и очагов разрушения, в практически важных случаях достаточно точно описывается в рамках линейной задачи. Для определения уровней указанных величин необходимо решать нелинейную задачу. При этом нужно учитывать, что коэффициент подобия может быть с достаточной для практики точностью определен с помощью упрощенных подходов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кобець А.С. Теріотичні передумови визначення параметрів еластичних робочих органів бурякозбиральних машин // Геотехническая механика. – Днепропетровск: Полиграфист, 2001. – Вып. 28. – С. 89-95.
2. Кобец А.С., Кобец А.Н. Исследования эластомеров в качестве рабочих органов для уборки ботвы кормовой свеклы // Труды II Международного симпозиума по механике эластомеров. – Днепропетровск: Полиграфист, 1997. – Том 1. – С. 323-328.
3. Термомеханика эластомерных элементов конструкций при циклическом нагружении / Потураев В.Н., Дырда В.И., Карнаухов В.Г. и др. – Киев: Наук.думка, 1987. – 288 с.
4. Дымников С.И., Мейерс И.Р., Эрдманис А.Г. Упругие потенциалы для слабосживаемых материалов // Вопросы динамики и прочности. – 1982. – Вып. 40. – С. 98-108.
5. Дымников С.И. Нелинейная постановка задач расчета тонкослойных резинометаллических элементов // Вопросы динамики и прочности. – 1982. – Вып. 40. – С. 34-41.
6. Потураев В.Н., Дырда В.И., Круш И.И. Прикладная механика резины. – Киев: Наук. думка, 1988. – 256 с.
7. Zifschits J.M., Kolsky H. The propagation of spherically divergent streus pulses in liwar viscoelastic solide // J. Mech Phys. Solids. – 1965. – 13, N 6. – P. 361-376.

УДК 621.001.25

Голофиевский А.В., Дырда В.И.

ЭКОЛОГИЧЕСКАЯ ПАРАДИГМА УСТОЙЧИВОГО РАЗВИТИЯ СЛОЖНЫХ ЭКОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Проблеми безпечного функціонування та стійкого розвитку складних екотехнічних систем розглядаються в еколого-економічному контексті.

ECOLOGICAL PARADIGM OF RESISTANT TO EVOLUTION OF THE COMPOSITE ECO-ENGINEERING SYSTEMS

Problems of safety operation and resistant to evolution of the composite eco-engineering systems are observed in an ecologo-economic context.

Проблемы устойчивого развития сложных экотехнических систем (или экотехнополисов [1]) несмотря на несомненную актуальность не получили еще должного освещения в научной литературе.

Имеющиеся публикации [1-16] скорее подчеркивают важность этой проблемы и ее сложность в общем вопросе устойчивого развития крупных регионов.