

$$\ell_{\text{дет}} = \frac{\ell_{2n}}{2} = \frac{\ell - \ell_{1n}}{2} = \frac{\ell - D\tau + \frac{d}{tq\alpha}}{2} = \frac{D\tau}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{d \cdot D}{2C} \right) = -a\tau + b \quad (4)$$

Из уравнения (4) следует, что длина прдетонировавшей части пассивного заряда зависит линейно от величины времени замедления, причем тангенс угла наклона прямой равен половине абсолютной величины скорости детонации. Постоянная «*b*» зависит от длины заряда, толщины преграды и отношения скорости детонации к скорости волны напряжений.

При разработке методов, обеспечивающих надежность взрыва зарядов ВВ, было предложено для сохранения работоспособности заряда использовать его инициирование в двух противоположных точках (в верхней и нижней части). Проверка этого предложения в лабораторных условиях дала положительный результат. В этом случае, при таком способе инициирования возрастают затраты на приобретение средств взрывания (СВ), что ухудшает экономические показатели взрывных работ.

Кроме того, используя результаты проведенных испытаний, представляется возможным создать такие условия взрывания, при которых встреча волн напряжений будет происходить не в заряде, а в массиве между взрывными скважинами. Достижение такого положения можно осуществить размещением в группах скважин, взрывааемых с замедлением, различных типов ВВ, имеющих разную скорость детонации. При таком способе формирования зарядов локализуется вредные проявления затухания детонации ВВ, обусловленных встречей детонационной волны и волны напряжений смежных групп взрывааемых скважинных зарядов.

Предложенный способ заряжания позволяет сформировать такой фронт волн напряжений от взрыва зарядов смежных групп с различными типами ВВ, что взаимодействие их происходит в массиве, а не в заряде. Применение такого способа позволяет повысить эффективность взрыва, исключить затухание детонации и сэкономить значительные средства на взрывчатых веществах.

УДК 678:539.376

Дырда В.И., Рубец Г.Т., Агальцов Г.Н.,
Мельянцов П.Т., Калганков Е.В., Тымко Н.В.

ФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ В МЕХАНИКЕ РАЗРУШЕНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Розглядаються деякі аспекти фрактального аналізу при руйнуванні твердих тіл при статичному та динамічному навантаженні.

THE FRACTAL ANALYSIS IN MECHANICS OF FRACTURE OF RIGID BODIES

Some aspects of the fractal analysis are considered at fracture of rigid bodies at static and a dynamic load.

1 Общие представления

В последние годы фрактальный анализ стал мощным и действенным инструментом для исследования механики твердого деформируемого тела. Об этом свиде-

тельствуют и публикации в периодической печати и тот интерес, который проявляет к этому вопросу инженерная практика [1-15].

Разрушение большого класса неоднородных материалов: металлов, горных пород, бетонов, эластомеров, композитов и др. – предопределяется стохастическим распределением дефектной структуры по объему и слабой возможностью релаксации локальных перенапряжений. Такое разрушение сопровождается сильной фрагментацией материала образца и большим разбросом пределов напряжения и долговечности, обусловленных многомасштабным уровнем дефектности различных размеров. Моделирование разрушения таких сильно неоднородных материалов вызывает необходимость использования соответствующего математического аппарата – теории фрактальных множеств для анализа особенностей эволюции разрушения в объеме материала [4-6].

Использование статистических методов для описания кумулятивного процесса повреждения структурно-неоднородных материалов предполагает стохастический характер распределения дефектов по объему, но конкретные вероятностные реализации процесса разрушения не исследовались. Для описания процесса разрушения строились схемы типа цепей Маркова, что позволяло определять вероятность разрушения материала при различных нагрузках. Такие построения были основаны на предположениях о независимости элементарных актов разрушения без учета особенностей геометрических параметров материала.

Появившиеся недавно подходы, учитывающие пространственную стохастичность характеристик неоднородности материала, были основаны на использовании методов теории перколяции [7, 8]. Структурные особенности образца моделировались решетчатой моделью со случайным распределением связей по их прочности. Таким образом, акт разрушения структурного элемента фиксировался в пространстве и был связан с другими элементами. Потеря несущей способности образца при этом соответствовала формированию критического перколяционного кластера, который характеризовался скалярной величиной – порогом протекания. Модели хрупкого разрушения решетчатого типа усложнялись, появились непрерывные модели с трещинами специального вида, учитывались возможные флуктуации прочности элементарных связей и др. [9, 10]. Однако полученные теоретические и экспериментальные результаты показали ограниченность такого подхода в связи с существенным различием элементарных носителей процесса разрушения: иерархической структурной системы дефектов, которая представляет более сложный объект. Решеточные модели разрушения нашли широкое применение в скейлинговом анализе разрушения случайно-неоднородных материалов [11]. При этом образец моделируется двумерной треугольной сеткой гармонических пружин, которые соединяются с соседними узлами с вероятностью P . При деформировании пружины удлиняются, а затем необратимо разрываются. После каждого шага растяжения i -ая пружина считается разорванной с деформацией

$$\varepsilon_i = \max_j \{ \varepsilon_j \},$$

а затем нагрузка перераспределяется до выполнения условия равновесия. Среднее разрушающее напряжение σ_b зависит от размера образца следующим образом

$$\sigma_b^\mu \approx [A(p) + B(p)\ln(L)]^{-1},$$

где $\mu = 1 \div 2$;

A и B – параметры среды;

L – линейный размер;

p – вероятности, характеризующие среду.

Такой подход допускает обобщение на случай взаимодействия типа Борна между узлами и различных типов случайных распределений дефектов на решетке (Вейбулла и др.). Полученные в результате применения к этим материалам скейлинговые закономерности стохастического процесса разрушения послужили стимулом и импульсом к применению теории фракталов в анализе эволюции разрушения [6]. С другой стороны, этому способствовало установление закономерностей автомодельности накопления повреждений и развития дефектов на различных структурных уровнях [12]. Кроме этого, еще одним фактором, обусловившим распространение фрактальных подходов, явилась близость теорий протекания и фрактальной геометрии в отношении похожести перколяционных и фрактальных кластеров. Однако, несмотря на похожесть геометрических фракталов между ними существуют принципиальные различия. В перколяционных моделях отсутствует иерархическая соподчиненность уровней структуры в алгоритме построения объекта моделирования. Фрактальный подход позволяет более детально исследовать с получением количественных характеристик пространственную и временную эволюцию процесса квазихрупкого разрушения стохастически и структурно неоднородных материалов типа горных пород, бетонов, керамик и др. Дискретность и неоднородность материала моделируется с помощью т.н. «фрактального дерева», которое позволяет обеспечивать масштабно-инвариантный механизм перераспределения нагрузки в запредельном режиме разрушения [13].

Основное понятие теории фракталов – дробная размерность показывает распределение массы в пространстве, уменьшаясь с увеличением «разрыхленности» объекта; она также связана с корреляционной функцией, определяющей нахождение одного элемента на фиксированном расстоянии от другого элемента множества. Самоподобие или самоповторяемость фрактального агрегата ограничена в пространстве естественным масштабом частиц, составляющим фрактал, и размером самого фрактального агрегата. Моделирование реальных объектов фрактальными структурами будет корректным при условии достаточной разделенности масштабов частиц и фрактального агрегата: на практике это сводится обычно к выполнению условия в их отношении на один порядок. Теория фракталов не аналогична однопараметрическому скейлинговому подходу, т.к. фрактальность может выполняться, например, только локально и иметь не одну фрактальную размерность. В этом случае они называются мультифрактальными и характеризуются бесконечным набором независимых размерностей. Несомненное преимущество применения фракталов в механике разрушения структурно-неоднородных сред заключается в многообразии методов построения

фрактальных агрегатов, начиная с относительно простых до достаточно сложных. Фрактальный подход является, таким образом, специфическим каркасом, в рамках которого могут быть сформулированы различные уравнения состояния и модели, позволяющие описывать достаточно широкий спектр явлений механики разрушения. Установление по экспериментальным данным возможности применения теории фракталов для характеристики параметров пористых сред и геометрии поверхности разрушения во многом стимулировало использование фрактальных подходов в изучении механических свойств и разрушения материалов. Численное моделирование профилей поверхностей разрушения по известным распределениям Гаусса размеров структурных элементов дало дробную размерность в пределах $d = 1,01-1,26$. Обычно выделяют три типа поверхности твердых тел:

- поверхностный фрактал – в этом случае фрактальной размерностью характеризуется площадь поверхности;
- массовый фрактал – характеризуется размерностью площади и объемом твердого тела;
- фрактал пор – площадь поверхности и объем пор.

Выполненные экспериментальные исследования показали, что фрактальная размерность (например, поверхности разрушения) не коррелирует с механическими характеристиками макрообразцов материала - пределом прочности, предельной деформацией и др. Это объясняется естественным образом: отсутствием пространственного скейлинга в моделях механики твердого деформируемого тела. Однако в некоторых случаях удается установить взаимосвязь фрактальной размерности поверхности разрушения и вязкости разрушения материала: возможны случаи как положительной, так и отрицательной корреляции.

При теоретическом рассмотрении особенностей зарождения и развития микротрещин необходимо вводить дополнительные механизмы (типа структурных перестроек) или иерархическую соподчиненность дефектов разных пространственных масштабов. Применение в этом случае решеточных моделей сводится к схемам теории перколяции. Если рассматривать хрупкое растрескивание плоской квадратной решетки, составленной из хрупких стержней, то приходим к уравнению состояния вида

$$\nabla(G\nabla u) = 0,$$

где $[G]$ и $[u]$ – матрицы модулей жесткости и перемещений, дополняются аналогом локального критерия прочности: каждый стержень разрушается, когда перемещения превышают критические.

Модули жесткости стержней статистически могут быть распределены произвольным образом. Фрактальная размерность таких кластеров составляет $d = 1,65 \pm 0,05$.

В некоторых работах по применению теории фракталов в описании хрупкого разрушения обосновывается внешняя аналогия геометрии трещин или поверхностей разрушения с фрактальными объектами, а затем используется приближение Ирвина к оценке распространения трещины в теле по зигзагообразным границам зерен, субзе-

рен и т.д. Иррегулярность поверхности разрушения считается признаком их автосимметричности, а фрактальная размерность определяется из простых геометрических соотношений на одном структурном уровне. Во фрактальных подходах наряду с методами механики разрушения используют также вероятностные методы, основанные на распределении минимальных значений Вейбулла

$$F(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^\alpha\right],$$

где μ – параметр положения интегральной кривой (нижняя граница распределения);

σ – параметр масштаба;

α – параметр формы (асимметрии и эксцесса).

Для учета механического эффекта масштабно-инвариантного переноса нагрузок в прочностных связях решетчатых моделей применяют нагруженное фрактальное дерево. Изменчивость размеров, форм и других внутренних параметров реальных структур представлена распределением Вейбулла значений разрушающего напряжения для ребер решетчатой модели различного уровня. Для учета более прочных связей используют двухмодальное распределение, что позволяет описать переход вероятностей разрушения от ограниченных областей разрушения к режиму предельного разрушения материала. Определение фрактальной размерности вводят при этом через суммарную плотность микротрещин различного масштабного размера. При этом параметр однородности в распределении Вейбулла при таком рассмотрении равен удвоенной фрактальной размерности дискообразной трещины.

Для определения морфологии микроповрежденности применяют концепцию мультифракталов, что позволяет проанализировать микро- и макроразрушение на различных масштабных уровнях структуры. Описание иерархически соподчиненной дефектной структуры материала при его деформировании и разрушении представляет определенный интерес при определении времени жизни объекта до образования фрактального кластера из разрушенных областей. Дело в том, что, используя фрактальность потенциального рельефа при движении по структурным уровням дефектов, можно ввести метрику конфигурационного пространства дефектов, образующих неэргодическую систему; точки этого пространства соответствуют отдельным ансамблям дефектов. Такой процесс может быть описан движением по узлам иерархического фрактального дерева, что позволяет определить характерные времена стабилизации дефектной структуры на основе анализа релаксации такой системы.

Анализ фрактальных подходов в механике хрупкого разрушения показывает, что, используя пространственно дискретизированные схемы - решеточные, связные, стержневые и аналогичные им представления, основанные, как правило, на простых физических предположениях, можно решать широкий круг задач практической направленности. Элементарные акты разрушения вводятся традиционным путем – нормировкой параметров напряженно-деформированного состояния. Подходы, использующие усложненные модельные представления: с учетом накопления поврежденности,

кинетики структурных изменений и др., применяют к описанию системы в целом, совершенно не уделяя внимания топологии разрушенной области, обусловленной пространственным стохастическим распределением параметров системы.

Наиболее перспективным подходом в этом плане является объединение кинетической постановки задачи развития разрушения как процесса (с учетом эволюции дефектной структуры) и фрактальную идеологию, позволяющую учитывать многоуровневый и разномасштабный характер деформирования и разрушения элементарных связей.

2 «Дерево» разрушения Кейли

Квазихрупкое разрушение случайно-неоднородных сред во многом определяется особенностями эволюции ансамбля дефектов различного масштабного уровня, что требует введения новой термодинамической переменной – параметра поврежденности и использования уравнения накопления поврежденности, например, в форме Качанова. Вид конкретно применяемых определяющих соотношений не будет изменять применяемой фрактальной схемы моделирования разрушения. Наиболее подходящим аппаратом для моделирования процесса разрушения прочностных связей является так называемое фрактальное дерево Кейли [177] в качестве аналога схемы дискретизации идеализируемой области (рис. 1).

Переход с первого нулевого уровня на n -й нижний соответствует делению исследуемой области разрушения на L^n частей (L – координационное число). Каждая ветвь n -го уровня соответствует структурному элементу области, который составляет $1/L^n$ -ю часть всего объема. Узлы являются началом ветви, которые соотносятся с центрами этих структурных элементов. Схематическая картина нагружения прямоугольного бруса с поперечным сечением $ABCD$ (размером $a \times b$), нагруженного постоянным усилием S на его концах, показана на рис. 1. При увеличении n – переходят на k -тый уровень дерева Кейли, получают 4^k прямоугольных элементов размером $(a/2^k) \times (b/2^k)$, получая все более сгущающуюся сетку разбиения; эта сетка тоже фрактал с размерностью $d = 2$. Такое деление осуществляется до уровня $n = N$ до тех пор, пока размер структурного элемента не будет соответствовать представительности объема: физико-механические харак-

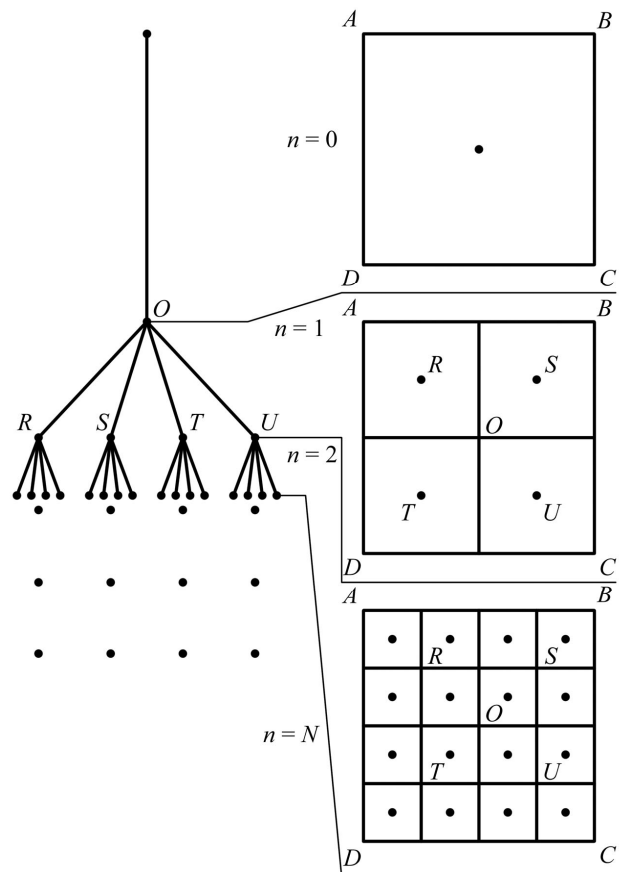


Рис. 1 – Фрактальное «дерево» Кейли

теристики в его пределах теперь становятся постоянными.

Вся неоднородность свойств материала и стохастичность развития ансамбля дефектов сосредоточена на N -ом уровне иерархии фрактального дерева, задавая тем самым распределение параметров по элементарным объемам случайным образом. Сам же характер распределения должен определяться по данным эксперимента и отражать как разброс прочностных свойств, так и различие темпов развития ансамбля дефектов в разных точках области. Разрушение i -го структурного элемента самого нижнего иерархического уровня определяется с помощью локального критерия разрушения. Развитие процессов разрушения в исследуемой области будет соответствовать движению вверх по фрактальному дереву; при этом условием «протекания» процесса на уровень k может быть разрушение всех ветвей (структурных элементов) $(k+1)$ -го уровня, выходящих из общего узла k .

Разрушение структурного элемента – обрыв соответствующей ветви приводит к перераспределению нагрузки на соседние элементы в пределах совместного узла фрактального дерева. Выходит, что макродефект приводит к возмущению напряженного состояния в пределах области, соизмеримой с размером самого дефекта, и таким образом реализуется масштабно-инвариантный перенос нагрузки. Перегрузки на одних элементах приводят к активизации процессов разрушения в прилегающих других элементах. Сначала образуются небольшие объединения из нескольких разрушенных структурных элементов, затем процесс ускоряется, и в результате формируется фрактальный кластер, который способствует фрагментации и полному разрушению сечения. Кинетика накопления повреждений и изменение числа разрушенных элементарных объемов показывает, что в течение большей части «жизни» образца макроскопические дефекты отсутствуют, а запредельное разрушение носит лавинообразный характер.

Формирование фрактального кластера в этой модели происходит следующим образом. Фрактальный агрегат растет не только на границах объема образца; особенности его эволюции обусловлены взаимодействием пространственной стохастичности и неоднородности прочностных свойств, особенностями напряженного состояния и характером перераспределения действующей нагрузки по мере разрушения структурных элементов. Форма кластеров для различных статистических реализаций (в зависимости от случайного характера свойств) будет существенно отличаться, однако их размерность Хаусдорфа-Безиковича практически будет оставаться постоянной. Полученное значение фрактальной размерности после усреднения по статистическому ансамблю кластеров составило $d = 1,73 \pm 0,05$, которое не противоречит данным по численному или экспериментальному определению d неоднородных пористых тел.

Основные параметры кластера, его размерность, а также топологические аспекты развития разрушения (степень фрагментации материала) будут определяться характером неоднородности среды и особенностями напряженно-деформированного состояния. В рассмотренную фрактальную модель разрушения естественным образом вводится иерархичность и соподчиненность уровней, что позволяет в принципе учесть специфику реализации процесса потери сплошности материала на различных

этапах и в разных объемах. Это оказывается очень важным при анализе объектов с исходно развитой иерархичностью в широком диапазоне размеров, например, массивов горных пород [13]. В модели разрушения должны найти отражение такие специфические особенности, как различие механизмов разрушения материала на разных структурных уровнях, так и различие материалов – поликристаллические агрегаты, слои горных пород или породные массивы в целом.

Все это возможно учесть введением различных законов эволюции подсистемы дефектов для структурно отличающихся пространственных масштабов. Условия перехода процесса развития дефектов на более высокие уровни с перераспределением нагрузки должны быть заменены кинетическими соотношениями, которые наиболее важны при описании крупномасштабных перестроек, реализующихся за относительно короткое время (типа растрескивание земной коры при землетрясениях).

В отношении анализа развития разрушения горных пород и породных массивов необходимо учитывать специфику напряженного состояния (близкого к гидростатическому сжатию) и характера разрушения – как правило, множественного трещинообразования. Кроме того, достаточно сложной проблемой является моделирование на основе фрактального дерева породного массива в плане учета условий контакта слоев горных пород. При этом необходимо модифицировать условия перераспределения нагрузок – пока это является сложной задачей. Наоборот, учет выработанного пространства (любой формы) осуществляется достаточно просто.

В общем случае фрактальная методология относительно просто может применяться практически для любых достаточно сложных систем, однако наиболее эффективно ее использование в моделировании стохастически многоуровневых процессов и объектов. Кроме рассмотренных примеров анализа разрушения теория фракталов может стать основой исследования поведения конструкций, состоящих из большого количества элементов. В этом случае движение вниз по разветвляющемуся фрактальному дереву Кейли будет соответствовать переходу от всей конструкции к ее частям, системам узлов, самим узлам, деталям и т.д. Тогда разрушение конструкции или потеря работоспособности будет определяться характером распределения порогов разрушения (времени наработки на отказ) по структурным элементам различного иерархического уровня.

Таким образом, универсальность моделирования процессов разрушения материалов и конструкций с помощью фрактальных деревьев Кейли достаточно очевидна: переход к анализу разрушения новой среды или конструкции требует несложных модификаций при условии наличия уравнений состояния и характера стохастичности свойств среды.

3 Множественное микроразрушение и фрактальность

Процессы множественного микроразрушения протекают также по следующей схеме: возникновению магистральной макротрещины предшествует достаточно длительный период накопления повреждаемости – зарождение, движение, рост и агрегация (кластеризация) всевозможного вида микродефектов. Процесс развития дефектов – пор, микротрещин, дислокаций и т.п., в основном, носит вероятностный характер,

что затрудняет описание процесса разрушения детерминистическими методами и обуславливает использование статистического подхода. Важную роль при этом играет гипотеза подобия (автомодельности) процесса разрушения. Если в материале имеется ансамбль взаимодействующих трещиноподобных дефектов, то при множественном разрушении процесс развития дефектов автомоделен: размерные параметры изменяются, в то время как безразмерные характеристики каскада дефектов, например, форма кривой распределения количества дефектов по размерам, остаются неизменными.

Согласно гипотезе подобия в процессе накопления повреждаемости ансамбль микродефектов растет как самоподобный кластер, т.е. объект, инвариантный относительно локальной полугруппы дилатаций, получивший название фракталов. Если каждое ребро фрактала, например, кривой Кох, рассматривать как микротрещину, то будем иметь налицо самоподобный каскад микротрещин. Регулярные геометрические фракталы очень удобны для изучения, однако в природных объектах строгая регулярность не имеет места, поэтому приходится использовать стохастические фракталы, проводя усреднения по всевозможным реализациям.

Теория перколяции представляет пример истинно стохастических фрактальных кластеров [7]. Обнаружено, что вблизи порога перколяции на расстояниях, не превышающих корреляционную длину, перколяционный кластер имеет фрактальную структуру. К этому следует добавить, что аналогия между процессами разрушения и теорией перколяции обсуждалась неоднократно [8]. При таком подходе к теории разрушения критическая вероятность перколяции определяет корреляционный масштаб поля микронапряжений, который отвечает неограниченному режиму и слиянию отдельных микродефектов в бесконечный кластер – образованию магистрального разрыва (макротрещины). В связи с тем, что теория перколяции относится к числу критических явлений в неупорядоченных средах, вблизи порога перколяции структура кластеров обладает свойством некоторой универсальности – практически не зависит от конкретного вещества или материала, что позволяет надеяться на получение универсального описания процесса разрушения.

При накоплении повреждаемости наряду с диффузией дефектов возникают и другие процессы, которые могут влиять на закон роста кластера, который подчиняется экспоненциальному росту. Экспоненциальное увеличение размеров кластера можно интерпретировать как начало лавинообразного накопления повреждаемости – начальную стадию макроразрушения. Распределение числа разрывов по размерам имеет степенное распределение: такое поведение характерно для всех фракталов, причем в процессе роста фрактального кластера изменяются только его размеры, а безразмерное распределение не изменяется. Например, при ползучести фрактальная структура дефектов развивается постепенно, и распределение числа дефектов по размерам обладает всеми признаками автомодельности.

Таким образом, предположение об автомодельности процессов множественного разрушения позволяет существенно упростить описание процесса накопления повреждаемости, а наиболее адекватным аппаратом при этом оказывается аппарат тео-

рии множеств дробной размерности – фракталы. Тогда в рамках таких представлений процесс накопления рассеянной разномасштабной повреждаемости рассматривается как экспоненциальный процесс роста самоподобного фрактального кластера до такой границы, когда начинается его лавинообразное протекание – начало макроразрушения.

4 Фрактальная геометрия разрушения

В рамках линейной механики разрушения допустимо моделирование распространения фрактальной трещины в хрупком материале на основе классического критерия Гриффитса [14]. Оказывается, что коэффициент интенсивности напряжений зависит от нагрузки, среднего размера трещины и ее фрактальной размерности. В таком подходе исходят из того факта, что поверхность излома или трещины, формирующаяся при разрушении большинства хрупких материалов, весьма нерегулярна и характеризуется наличием неровностей – пиков, зазубрин, изрезанностей и т.д. самых различных размеров. Поэтому реальная трещина далека от той идеализации трещины с гладкими берегами, которые рассматриваются в линейной механике разрушения. Она имеет «пилообразную» или «зигзагообразную» структуру на различных масштабах рассмотрения типа кривой Кох (рис. 2) [15]. В ряде работ обнаружена важная особенность структуры поверхности трещины – статистическое самоподобие микро-рельефа поверхности разрушения, что позволяет моделировать ее фрактальными поверхностями с дробной размерностью. Причины и закономерности формирования фрактальной геометрии трещины при разрушении изучены еще недостаточно, хотя и имеются положительные результаты моделирования фрактальной структуры поверхности трещины или очагов множественного разрушения. Если рассматривать случай хрупкого разрушения и развития трещины в плоской задаче, то рост трещины будет, вообще говоря, носить стохастический характер. Предполагая, что в теле содержится трещина – стохастический фрактал размерности d и, считая, что в равновесном случае, следуя критерию Гриффитса, трещина развивается, тогда коэффициент интенсивности напряжений будет содержать в себе параметр фрактальной размерности. Коэффициент интенсивности напряжений отражает теперь необычный масштабный фактор: при возрастании фрактальной размерности (извилистости трещины) он убывает по линейной зависимости от $d-1$. Такой подход допускает обобщение также и на трехмерный случай. Сложная структура поверхности разрушения вносит существенный вклад в процесс распространения трещин и должна учитываться при его описании.

Использование для моделирования трещин фрактальных поверхностей или фрактальных кривых (в плоском случае) ограничено в связи с тем, что извилистость реальной трещины, как и ее площадь, имеют конечные значения, поэтому существует естественный нижний предел применимости фрактальной модели.

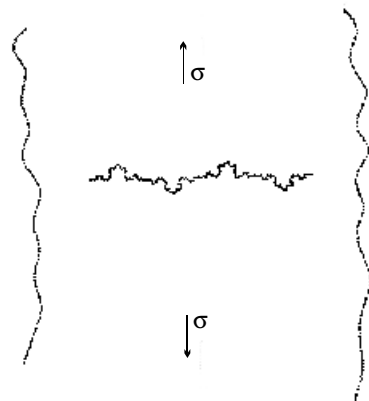


Рис. 2 – Модель реальной трещины в виде фрактальной кривой Кох

Этот предел обычно связан с микроструктурой среды; для металлов, например, это может быть размер зерна и субзерна, для горных пород – минимальная микроблочность. Как известно, с математической точки зрения регулярный фрактал бесконечно извилист, а фрактальная поверхность или линия имеют бесконечную площадь или длину, соответственно. Следует также помнить, что должен существовать и верхний предел применимости фрактальной модели, который связан с геометрическими размерами тела, размером трещины, характерным масштабом неоднородности внешних полей и т.д. Таким образом, оставляя пока в стороне вопрос о возможной мультифрактальной структуре трещины, фрактальная модель применима для мезомасштабов l , удовлетворяющих условию

$$\delta \ll l \ll L,$$

где δ – естественный нижний предел;

L – верхний предел, связанный с геометрическими размерами тела.

Следует также отметить, что структура поверхности разрушения, ее геометрические параметры и фрактальная размерность d существенно зависят от механизма разрушения, характера процесса накопления повреждений. Фрактальная трещина имеет иерархическое устройство, поэтому процесс разрушения (продвижения кончика трещины) сопровождается каскадным переносом высвобожденной упругой энергии с больших масштабов на меньшие и, наконец, на микромасштаб, где происходит диссипация энергии и расходуется на образование новой поверхности разрыва.

5 Разрушение как мультифрактальный процесс

Механизм разрушения существенно влияет на фрактальную размерность трещины, поэтому следует учитывать при переходе с одного масштаба на другой изменение фрактальной размерности: иными словами, разрушение следует рассматривать как многоуровневый, мультифрактальный процесс. В настоящее время наиболее изученными характерными объектами, возникающими при разрушении материалов, являются:

- кластеры микротрещин при множественном разрушении;
- ветвящиеся трещины в стеклообразных материалах и горных породах;
- поверхность одиночных трещин в металлах и сплавах;
- каскады обломков, образовавшихся при взрывном или ударном разрушении.

В рассмотренных случаях фрактальную структуру имеет трещина или кластер трещин в очаге разрушения, однако при разрушении могут появляться и другие структуры, характеризующиеся фрактальными свойствами. Дело в том, что многие реальные материалы имеют четко выраженное зернистое строение. Зерна могут отличаться размерами, формой, ориентацией. На макроуровне все неоднородности микроструктуры обычно сглаживаются, и тогда для описания поведения материалов можно пользоваться моделью однородной сплошной среды. По другому складывается ситуация на микро- и мезомасштабах: на таком уровне рассмотрения уже нельзя игнорировать неоднородность «гранулярной» структуры материала, поскольку она приводит к неоднородному распределению напряжений на мезомасштабе, если даже макронапряженное состояние однородно. Одни зерна или кластеры зерен оказываются

недогруженными, в то время как другие перегруженными. В итоге сформированное таким образом поле микронапряжений формирует ветвистые или ячеистые структурные области с различным уровнем напряжений. Возникающие на мезомасштабе структуры материала при разрушении будут самоподобны, поэтому самоподобными будут и распределения напряжений. Проведенные экспериментальные исследования и данные модельных расчетов вполне подтверждают сказанное и показывают, что формирующиеся в неоднородной «гранулированной» среде ветвистые структуры перенапряженных и разгруженных от напряжений областей весьма похожи на фрактальные кластеры микротрещин. Если теперь в такой нагруженной неоднородной на мезомасштабе среде распространяется трещина, не обязательно фрактальная, то при продвижении трещины зерна, примыкающие к ней, будут разгружаться. Такой процесс разгрузки будет распространяться в толще материала, разгруженные зерна увлекут от напряжений соседние зерна, те своих соседей и т.д. Конечно, процесс разгрузки необязательно будет охватывать все зерна: он будет охватывать лишь некоторые избранные цепочки перенапряженных зерен. В остальных зернах тоже будут происходить перераспределения напряжений, но этим, в принципе, можно пренебречь.

Таким образом, здесь проявляется в новом «фрактальном исполнении» старая идея Н.Н. Давиденкова о многомасштабных уровнях микронапряжений в поликристаллических телах.

6 Фрактальный анализ поверхности разрушения

Ниже рассматривается одна из важных сторон механики разрушения твердых тел – фрактальный анализ поверхности разрушения образцов при их длительном циклическом нагружении. Использование фрактальной трактовки разрушения здесь вполне уместно по следующим причинам. При циклическом нагружении поверхность макротрещин имеет нерегулярную структуру с наличием различного рода неровностей. Важной особенностью такой поверхности является статистическое самоподобие рельефа поверхности; при этом свойство самоподобия сохраняется на макро-, мезо- и микроуровнях. Все это позволяет моделировать такую нерегулярную структуру фрактальными поверхностями.

Накопленную экспериментальную информацию в рассматриваемом контексте можно изложить в виде кратких эмпирических обобщений.

1. Наблюдаемая экспериментально кинетика разрушения твердых тел обусловила важное обобщение: макроразрушение материала можно рассматривать как процесс множественного микроразрушения; возникновению магистральной трещины предшествует длительный период накопления повреждаемости. В течение этого периода происходит вероятностный процесс зарождения, движения, роста и агрегации микродефектов самого различного вида: пор, суб-микротрещин, микротрещин и т.д. При этом процесс развития микродефектов автомодельный, т.е. подобен самому себе: в процессе разрушения изменяются лишь размерные параметры, а безразмерные характеристики микродефектов, например, форма кривой распределения их числа по размерам, остаются без изменений. Таким образом, в процессе разрушения каскад микродефектов растет как самоподобный кластер. Такие самоподобные геометрические

объекты получили название фракталов и в отличие от обычных евклидовых множеств обладают дробной пространственной размерностью - так называемой фрактальной размерностью или размерностью Хаусдорфа - Безиковича, т.е. фрактальная структура резины является системой с дробной размерностью. Наблюдаемый в резине в реальных условиях фрактальный кластер отражает динамику процесса разрушения, создан по случайному закону и на первый взгляд имеет совершенно неупорядоченную структуру. Тем не менее, исследования показывают, что кластер обладает строгой иерархией структуры и имеет внутренний порядок, являющийся фрактальной размерностью кластера.

2. По аналогии с классической теорией упругости был предложен вариант теории упругости фракталов; в основе его лежат два экспериментально установленных закона: закон Гука, постулирующий пропорциональность относительной деформации s твердого тела действующему напряжению, и закон Пуассона, согласно которому существует эффект поперечных деформаций $\varepsilon_{\perp} = \nu\varepsilon_{\parallel}$ при отсутствии соответствующих напряжений (ν – коэффициент Пуассона).

В этом случае справедливы два утверждения (для вязкоупругих тел).

Во-первых, упругая деформация фрактала под действием внешней силы F , отнесенной к единичному сечению, приводит к появлению единицы нового характерного масштаба длины L_F

$$F = \frac{\partial u}{\partial L_F} - T \frac{\partial S}{\partial L_F},$$

где первый член обусловлен энергетической составляющей упругости фрактала, а второй – энтропийной (u – энергия, S – энтропия, T – температура).

Во-вторых, при упругой деформации фрактала самоподобие структурных изменений (развитие каскада повреждений) сохраняется, т.е. $d_f = \text{const}$.

Таким образом, коэффициент поперечной деформации фрактала однозначно определяется его размерностью d_f и размерностью объемлющего его пространства d . При $d = 3$

$$\nu = \frac{d_f}{d-1} - 1 \quad \text{или} \quad d_f = (d-1)(1+\nu).$$

На основе этих предположений были получены выражения, связывающие параметры упругости твердого тела.

$$G = \frac{d-1}{2d_f} E, \quad B = \frac{E}{d(d-d_f)}$$

где G, E, B – соответственно модули сдвига, упругости и объемной упругости.

$$\text{При } d = 3 \quad G = \frac{E}{d_f}.$$

Как известно, реальная поверхность разрушения резин имеет шероховатую, нерегулярную структуру, отражающую динамику процесса разрушения [24]. При этом несмотря на кажущуюся хаотичность, поверхность разрушения резины обладает свойствами самоподобия на микро- и макроуровнях. Если площадь S такой самопо-

добной (автомодельной) поверхности покрыть квадратами со стороной R_0 , то она будет пропорциональна

$$S = (R/R_0)^{d_f-2}, \quad (4)$$

где d_f – фрактальная размерность Хаусдорфа – Бесиковича. Для гладких поверхностей разрушения (в резине они при циклическом разрушении не наблюдаются) $d_f = d - 1$ и при $d = 3$ (евклидово пространство) $d_f = 2$.

Для фрактального анализа поверхности разрушения удобно воспользоваться экспериментальным приемом Б. Мандельброта; по его мнению, такая поверхность разрушения является поверхностью с локальной фрактальной размерностью, она обладает самоподобием и для нее можно использовать соотношения периметра и площади в виде

$$L(\delta) \sim [S(\delta)]^{\frac{d_p}{2}} \text{ или } d_p = \frac{2 \lg L(\delta)}{\lg S(\delta)},$$

где $d_p = d - 1$ (здесь как и выше d_p – фрактальная размерность поверхности разрушения);

L – длина «береговой линии» шероховатой или светлой зоны на фрактограмме;

S – площадь этих зон;

δ – шаг измерения или так называемый «эталон».

Таким образом, метод фрактальной оценки поверхности разрушения позволяет определить макроструктурные характеристики тела по значениям микроструктурных параметров материала без каких-либо подгоночных коэффициентов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булат А.Ф., Дырда В.И. Фрактальная природа разрушения эластомеров при длительном циклическом нагружении // Геотехническая механика. – Днепропетровск. -2003. – Вып. 45. – С. 3-21.
2. Федер Е. Фракталы. – М.: Мир, 1991. – 254 с.
3. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – М.: Ин-т компьютерных исследований, 2002. – 656 с.
4. Иванова В.С. Фрактальная механика разрушения. Задачи и перспективы практического использования // Самоорганизующиеся и фрактальные структуры. – Уфа: Уфим. нефт. ин-т, 1990. – С. 3-14.
5. Иванова В.С. Синергетика: Прочность и разрушение металлических материалов. – М.: Наука, 1992. – 159 с.
6. Синергетика и фракталы в материаловедении / В.С. Иванова, А.С. Баланкин, И.Ж. Булин, А.А. Оксогов. – М.: Наука, 1994. – 384 с.
7. Челидзе Т.Л. Фрактальность структур разрушения геоматериалов // Физические и сейсмологические основы прогнозирования разрушения горных пород. – М.: Изд-во РАН, 1992. – С. 39-46.
8. Челидзе Т.Л. Методы теории протекания в механике геоматериалов. – М.: Наука, 1987. – 136 с.
9. Неймарк А.В. Многомасштабная перколяционная система // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1989. – 96, № 4. – С. 1386-1396.
10. Горуля П.Е. Моделирование процесса разрушения неоднородных твердых тел на основе теории перколяции // Мат. и электрон. моделир. в машиностр. – К.: Техника, 1989. – С. 47-53.
11. Горуля П.Е. Об одной перколяционной модели хрупкого разрушения твердых тел // Моделир. и оптимиз. сложн. мех. систем. – К.: Техника, 1990. – С. 11-16.
12. Наймарк О.Б., Давыдова В.В. О статистической термодинамике твердых тел с микротрещинами и автомодельность усталостного разрушения // Проблемы прочности. – 1986. – № 1. – С. 91-95.
13. Зильбершмидт В.В. Фрактальные подходы в механике разрушения. – Свердловск: Ин-т МСС, 1990. – 48 с.
14. Баланкин А.С., Бугримов А.Л. Фрактальная размерность трещин, образуемых при хрупком разрушении модельных решеток и твердых тел // Письма в ЖТФ. – 1991. – 17, № 17. – С. 63-67.
15. Мосолов А.Б. Фрактальная Гриффитсова трещина // Журнал технической физики. – 1991. – 61, № 7. – С. 57-60.