

едафотопу, що складається з 30 см шару лесоподібного суглинку і 80 см шару насипного ґрунту. Такий варіант за рівнем родючості не поступається непорушеним староорним угіддям.

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Кузьменко П.К. Биологическое закрепление хвостохранилищ горно-обогатительных комбинатов в условиях Криворожского бассейна // Повышение безопасности труда на горнорудных предприятиях. –М. –1989. –С. 38-54.
2. Левит С.Я., Пикалова Г.И. Рекультивация золоотвалов и шламоохранилищ на Урале // Растения и промышленная среда. – Свердловск: УрГУ, 1984. –С. 79-114.
3. U.S Department of Agriculture. 1982. Wildlife users guide for mining and reclamation. USDA – FS Intermountain For. Range Exp. Stn. Gen. Tech. Rep. INT –126. USDA-FS, Ogden, UT.
4. Медведев А.Е. Сельскохозяйственная рекультивация железорудного шламоохранилища «Грачев лог»// Тр. Воронежского СХИ. –1985. –С. 67-84.

УДК 678.026

Кобец А.С., Науменко Н.Н.

## ИЗГИБ БАЛКИ, СОПРЯЖЕННОЙ НА НЕКОТОРОМ УЧАСТКЕ С ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНОЙ

В статті наведено дослідження величини деформацій від власної ваги механічної системи, що складається з непереривно-сполучених на деякій ділянці шарнірно опертої балки та прямокутної горизонтальної пластини.

### CURVING OF A BEAM, THE CONJUGATE ON SOME SITE WITH A HORIZONTAL RECTANGULAR PLATE

In paper examinations of magnitude of strains from a body weight of a mechanical system which will consist from continuously connected on some site of a turning supported beam and a rectangular horizontal plate are reduced.

Рассматривается деформация собственным весом механической системы, составленной из шарнирно опертой балки и прямоугольной горизонтальной пластины, непрерывно связанных на участке  $ab$  (Рис. 1).

Пластина симметрична относительно ребра  $ab$ . Ее края, параллельные оси  $x$ , при деформациях конструкции остаются прямолинейными (подвижный шарнир). Граничные условия других краев могут быть произвольными.

В данной работе форма статического изгиба системы собственным весом, устанавливается методом последовательных приближений.

Первое приближение формы статического изгиба конструкции построим для пластины и для каждого из участков балки ( $0a$ ;  $ab$ ; и  $b\ell$ ) отдельно.

Отнесем каждый из выделенных участков к собственной системе отсчета с началом в левом конце участка недеформированной системы. Пластину отнесем к системе с началом в точке  $a$

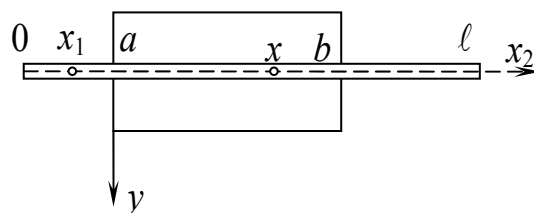


Рис. 1

(рис. 1). Форму изгиба одной из симметричных частей пластины  $W(xy)$  зададим выражением

$$W(xy) = c_0 + c_1x + [X(x) - c_0 - c_1x]Y(y), \quad (1)$$

где  $c_0$  и  $c_1$  – постоянные, определяющие положения координатной плоскости пластины, отнесенной к системе координат  $xy$  (перемещение начала координат и угол поворота вокруг оси  $ay$ );

$X(x)$  – функция, определяющая прогибы балки на участке  $ab$ ;

$Y(y)$  – некоторая функция, удовлетворяющая крайевым условиям пластины на границах  $y=0$  и  $y=c$  и равная единице при  $y=0$ .

Установим вид функции  $X(x)$ . На участке  $ab$  балка нагружена распределенной нагрузкой интенсивности  $q$  и, кроме того, на балку будет передаваться давление от двух частей пластины, определяемое по формуле [1]

$$R = 2D \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right]_{y=0}, \quad (2)$$

где  $D$  – цилиндрическая жесткость;  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Тогда, с учетом (1), дифференциальное уравнение изогнутой оси балки на участке  $ab$  имеет вид

$$EJX^{IV}(x) = -q - 2D[X(x) - c_0 - c_1x]Y'''(0), \quad (3)$$

где  $EJ$  – изгибная жесткость балки; штрихами обозначена производная по координате.

Решая уравнение (3), получаем

$$X(x) = -\frac{q}{2DY'''(0)} + c_0 + c_1x + e^{kx}(c_2 \sin kx + c_3 \cos kx) + e^{-kx}(c_4 \sin kx + c_5 \cos kx), \quad (4)$$

где  $k = \sqrt[4]{DY'''(0)/2EJ}$ .

Дифференциальные уравнения изогнутой оси балки на участке  $oa$  и  $b\ell$  имеют одинаковый вид

$$EJX^{IV}(x) = -q. \quad (5)$$

Интегрируя (5), для участков  $oa$  и  $b\ell$  соответственно имеем

$$X_1(x_1) = -\frac{q}{EJ} \frac{x_1^4}{24} + c_6 \frac{x_1^3}{6} + c_7 \frac{x_1^2}{2} + c_8 x_1 + c_9; \quad (6)$$

$$X_2(x_2) = -\frac{q}{EJ} \frac{x_2^4}{24} + c_{10} \frac{x_2^3}{24} + c_{11} \frac{x_2^2}{2} + c_{12} x_2 + c_{13}. \quad (7)$$

Постоянные интегрирования ( $c_2$ - $c_{13}$ ) в выражениях (4, 6, 7) определяются из крайевых условий. Эти условия выражаются в отсутствии перемещений концов балки и изгибающих моментов в шарнирных опорах, а также в равенстве прогибов, углов поворота сечений, изгибающих моментов и перерезывающих сил в точках сопряжения смежных участков  $a$  и  $b$ .

Аналитически это запишется так:

$$X_1(0) = 0; \quad X_1''(0) = 0; \quad X_2(b_1) = 0; \quad X_2(\ell_1) = 0;$$

$$\begin{aligned} X_1(a) = X(0); \quad X_1'(a) = X'(0); \quad X_1''(a) = X''(0); \quad X_1'''(a) = X'''(0); \\ X(b_1) = X_2(0); \quad X'(b_1) = X_2'(0); \quad X''(b_1) = X_2''(0); \quad X'''(b_1) = X_2'''(0). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь  $l_1 = l - b$ ;  $b_1 = b - a$ .

Постоянные  $c_0$  и  $c_1$  будут определяться в зависимости от граничных условий пластины по краям  $x' = 0$ ;  $x' = b - a$ .

Рассмотрим некоторые возможные случаи.

1. Края пластины  $x = 0$ ;  $x = b_1$  – абсолютно жесткие, т.е. контур пластины недеформируем. Для  $c_0$  и  $c_1$  будем иметь

$$\begin{aligned} c_0 = X_1(a); \\ c_0 + c_1 x = X(b - a). \end{aligned} \quad (9)$$

2. Край  $x = 0$  – жесткий, а край  $x = b_1$  – свободный. Тогда

$$c_0 = X_1(a). \quad (10)$$

Еще одно уравнение можно получить из условий равновесия пластины

$$Q = \int_0^{b-a} 2D [X(x) - c_0 - c_1 x] Y'''(0) dx, \quad (11)$$

где  $Q$  – общий вес двух симметричных частей пластины.

3. Оба края податливые. В этом случае будет иметь место условие (11) и еще одно условие можно получить в виде уравнения моментов относительно оси  $y$

$$Q \frac{b_1}{2} = \int_0^{b-a} 2D [X(x) - c_0 - c_1 x] Y'''(0) x dx. \quad (12)$$

Таким образом, задавшись предварительно подходящей функцией  $Y(y)$ , исходя из граничных условий балки, условий сопряжения рассматриваемых участков балки, а, также используя необходимые уравнения из (9)-(12), можно прийти к системе уравнений, линейных относительно постоянных.

Установив значения постоянных  $c_0$ - $c_{13}$ , определим тем самым первое приближение для функции  $X(x)$ .

По полученному виду функции  $X(x)$  уточним выражение для функции  $Y(y)$ . Определим ее из условия минимума потенциальной энергии пластины при поперечном изгибе ее собственным весом. Для этого составим выражения для потенциальной энергии  $\Gamma$  на единицу длины пластины [2]

$$\Gamma = \int_0^{b_1} \left[ \frac{1}{2} m_x \chi_x + \frac{1}{2} m_y \chi_y + m_{xy} \chi_{xy} - q_n W(x, y) \right] dx, \quad (13)$$

где  $q_n$  – распределенный вес пластины;

$\chi_x, \chi_y$  – изменение кривизны срединной поверхности пластины соответственно в направлении осей  $x$  и  $y$ ;

$\chi_{xy}$  – относительный угол закручивания;

$m_x$  и  $m_y$  – изгибающие моменты;

$m_{xy}$  – крутящий момент.

Известно, что [2]

$$\chi_x = -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}; \quad \chi_y = -\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}; \quad \chi_{xy} = -\frac{\partial^2 W}{\partial_x \partial_y}; \quad (14)$$

$$m_x = D(\chi_x + \mu\chi_y); \quad m_y = D(\chi_y + \mu\chi_x); \quad m_{xy} = D(1-\mu)\chi_{xy}.$$

Подставляя (14) в (13), нетрудно получить

$$\Gamma = \frac{1}{2}DY^2(y)P_1 + D\mu Y''(y)Y(y)P_2 + \frac{1}{2}D[Y''(y)]^2 P_3 + \\ + D(1-\mu)[Y'(y)]^2 P_4 - q_n P_5 - q_n Y(y)P_6, \quad (15)$$

где введены обозначения

$$P_1 = \int_0^{b_1} [X''(x)]^2 dx; \quad P_2 = \int_0^{b_1} X''(x)[X(x) - c_0 - c_1 x] dx; \quad P_3 = \int_0^{b-a} [X(x) - c_0 - c_1 x]^2 dx; \\ P_4 = \int_0^{b_1} [X'(x) - c_1]^2 dx; \quad P_5 = \int_0^{b_1} (c_0 + c_1 x) dx; \quad P_6 = \int_0^{b_1} [X(x) - c_0 - c_1 x] dx.$$

Отдельные члены уравнения Эйлера [2] вариационной задачи

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial Y(y)} - \frac{d}{dy} \left[ \frac{\partial \Gamma}{\partial Y'(y)} \right] + \frac{d^2}{dy^2} \left[ \frac{\partial \Gamma}{\partial Y''(y)} \right] = 0 \quad (16)$$

имеют следующий вид:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial Y(y)} = DY(y)P_1 - q_n P_6 + D\mu Y''(y)P_2; \\ \frac{d}{dy} \left[ \frac{\partial \Gamma}{\partial Y'(y)} \right] = 2D(1-\mu)Y''(y)P_4; \\ \frac{d^2}{dy^2} \left[ \frac{\partial \Gamma}{\partial Y''(y)} \right] = D\mu Y''(y)P_2 + D.$$

Подставляя эти выражения в (16), получим дифференциальное уравнение для  $Y(y)$

$$DP_1 Y(y) - q_n \cdot P_6 + D\mu P_2 Y''(y) - 2D(1-\mu)P_4 Y''(y) + D\mu P_2 Y''(y) + P_3 DY'''' = 0$$

или

$$Y'''' + 2\nu^2 Y''(y) + r^4 Y(y) = q_1, \quad (17)$$

где

$$2\nu^2 = \frac{2\mu P_3 - 2(1-\mu)P_4}{P_3}; \quad r^4 = \frac{P_1}{P_3}; \quad q_1 = \frac{q_n P_6}{P_3 D}.$$

Частное решение уравнения (17) имеет вид

$$Y(y) = \frac{q_1}{r^4}. \quad (18)$$

Определяя общее решение соответствующего однородного уравнения, составим характеристическое уравнение

$$P^4 + 2\nu^2 P^2 + r^4 = 0, \quad (19)$$

корни которого будут

$$k_{1,2} = \pm\sqrt{-\nu^2 + \sqrt{\nu^4 - r^4}}; \quad k_{3,4} = \pm\sqrt{-\nu^2 - \sqrt{\nu^4 - r^4}}. \quad (20)$$

Рассмотрим возможные случаи соотношений коэффициентов входящих в выражения (20).

Пусть  $\nu^2 < 0$  и  $r^4 < \nu^4$  (корни действительные). Тогда, обозначив  $k_{1,2} = \alpha$ ,  $k_{3,4} = \beta$ , для  $Y(y)$  получим

$$Y(y) = c_{14} \operatorname{ch} \alpha y + c_{15} \operatorname{sh} \alpha y + c_{16} \operatorname{ch} \beta y + c_{17} \operatorname{sh} \beta y + \frac{q_1}{r^4}. \quad (21)$$

Для  $r^4 < \nu^4$  и  $\nu^2 > 0$  (корни мнимые) будем иметь

$$Y(y) = c_{14} \operatorname{ch} \alpha y + c_{15} \operatorname{sh} \alpha y + c_{16} \operatorname{ch} \beta y + c_{17} \operatorname{sh} \beta y + \frac{q_1}{r^4} \quad (22)$$

Если  $r^4 > \nu^4$  (корни комплексные), то для функции нетрудно получить выражение

$$Y(y) = e^{-\bar{\alpha}y} (c_{14} \cos \bar{\beta}y + c_{15} \sin \bar{\beta}y) - e^{-\bar{\alpha}y} (c_{16} \cos \bar{\beta}y + c_{17} \sin \bar{\beta}y) + \frac{q_1}{r^4} \quad (23)$$

где

$$\bar{\alpha} = \sqrt{\frac{r^2 - \nu^2}{2}}; \quad \bar{\beta} = \sqrt{\frac{r^2 + \nu^2}{2}}.$$

Постоянные интегрирования  $c_{14}$ ,  $c_{15}$ ,  $c_{16}$ ,  $c_{17}$  в выражениях (21, 22, 23) определяются из граничных условий для функции  $Y(y)$

$$Y(0) = 1; \quad Y'(0) = 0; \quad Y(c) = 0; \quad Y''(c) = 0. \quad (24)$$

Установив таким образом первое приближение для функции  $Y(y)$  можно, вычислив соответствующее значение  $Y'''(0)$ , определить второе приближение для функции  $X(x)$  и так далее до приближенного повторения результатов.

После этого окончательно устанавливаются выражения для  $X(x)$  на каждом из выделенных участков конструкции, а также вид функции  $W(x, y)$ .

Рассмотренная схема решения задачи не накладывает ограничений на соотношения размеров конструкции и может быть использована при расчете более сложных систем, для которых представленный на рис. 1 конструктивный элемент может являться составной частью.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – М.: Наука, 1966.
2. Кан С.Н. Строительная механика оболочек. – М.: Машиностроение, 1966.