

Д-р техн. наук С.П. Минеев,
канд. физ.-мат. наук В.В. Шумриков
(ИГТМ НАН Украины),
канд. техн. наук М.А. Выгодин (НГУ),
А.Л. Сахненко, С.А. Обухов
(Морской порт Южный)

**ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА ОЦЕНКИ КИНЕМАТИЧЕСКИХ
И ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МЕХАНИЧЕСКОГО
ВИБРОВОЗБУДИТЕЛЯ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К РАЗРЫХЛЕНИЮ
АГРЕГИРОВАННОГО СЫПУЧЕГО ГРУЗА**

Розглянуто розрахункову модель для оцінки ефективних параметрів віброзпушування змерзшогося вугілля. Встановлено оптимальні приватні режими впливу, що дозволили ефективно експлуатувалася віброзпушувальну установку протягом тривалого часу.

**METHOD SUBSTANTIATION OF ACCOUNT KINEMATICAL
AND DYNAMIC CHARACTERISTICS OF THE VIBRATOR
FOR LOOSENING ICE LOOSE MATERIAL**

Calculative model for valuation of effective properties of vibrate loosen had been seen. Optimal partial regime of influence had been set. It permit effectively exploit vibrosen apparatus in a long time.

Одним из эффективных способов, интенсифицирующих снижение контактной прочности при разрушении горных пород, является способ виброобработки массива акустическими упругими волнами, создаваемыми механическим вибратором с дебалансом [1]. Несмотря на перспективность применения механического вибратора с дебалансом не только для разупрочнения и разрушения горных пород в массиве, но и, например, при использовании его в качестве рыхлителя смерзшихся сыпучих грузов, исследования по определению методов расчета его режимных характеристик слабо отражены в литературе. Это связано с тем фактом, что задача определения кинематических и динамических характеристик вибратора с дебалансом при взаимодействии его с горной породой, является крайне нелинейной и точных аналитических решений в квадратурах, которые могли бы быть положены в основу методик расчета, не существует [2]. Поэтому в данной статье авторы сделали попытку обосновать метод расчета кинематических и динамических характеристик механического вибровозбудителя для разрушению смерзшейся углепородной массы.

Анализ экспериментальных исследований кинематических и динамических параметров механических вибраторов при взаимодействии их с упруго-пластическими средами показал, что нелинейность колебаний связана с отсутствием строгой взаимосвязи максимума динамического коэффициента и частоты и обусловлена видом петли гистерезиса в координатах обобщенная сила-деформация [3,4].

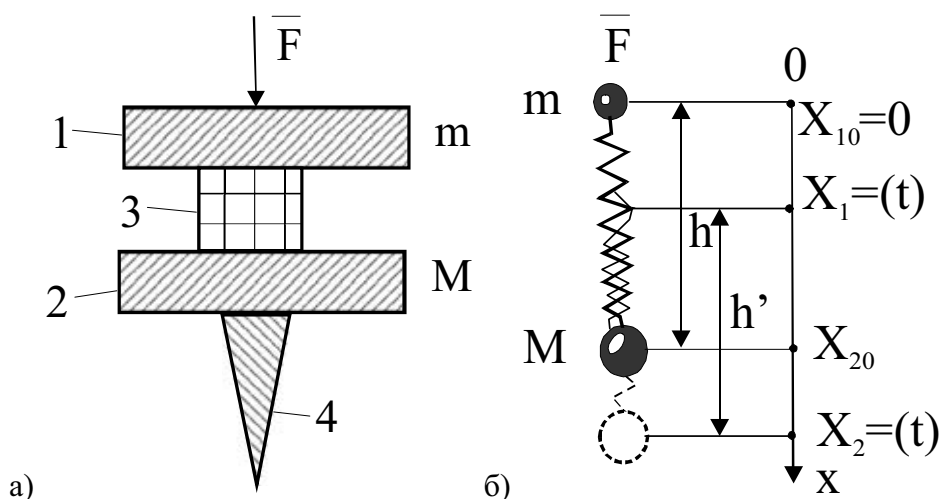
Кроме того, трудность интерпретации результатов исследований параметров процессов взаимодействия механических вибраторов с упруго-пластической средой связана с еще одним существенным фактом нелинейности, а именно – с эф-

фактом Зоммерфельда, который связывает величины параметрических возбуждений и автоколебаний систем с крутизной характеристики неидеального источника колебаний [5,6].

Вместе с тем, задачи горной механики в настоящее время настоятельно требуют разработок методов расчета поведения механических вибраторов при взаимодействии их с упруго-пластическими средами для установления режимных характеристик системы «вибратор-среда» даже при условии получения оценочных результатов исследований [7].

Для примера можно привести широкое использование штыревых виброрыхлителей при разгрузке смерзшихся сыпучих грузов, транспортируемых в ж.д. полувагонах [8].

Одной из основных проблем, возникающих в результате внедрения рыхлящих штырей в смерзшиеся сыпучие грузы, как показано в [9,10], является их заклинивание, что обусловлено ростом сопротивляемости среды, а, следовательно, и увеличением статических тангенциальных усилий, приводящих в "захвату" смерзшимся материалом вибрирующих стержней. Для установления основных качественных параметров взаимодействия виброрыхлителей со смерзшейся массой рассмотрим процесс рыхления в соответствии со схемой, представленной на рис. 1.



1 – верхняя плита массой m ; 2 – нижняя плита массой M ;

3 – амортизатор, 4 – вибрирующие стержни

Рис. 1 – Расчетная схема процесса колебаний виброрыхлителей: ()

В соответствии со схемой на рис. 1а колебания верхней плиты, вызванные вращением несбалансированного маховика, приводят к появлению гармонической силы, действующей со стороны первой плиты массой m , на вторую плиту массой M (где F_0 - амплитуда вибрирующей силы, $\omega=2\pi f$ – круговая частота, f - частота действующей силы). Взаимодействие верхней плиты и нижней, разделенных упругой прокладкой, можно исследовать на основе упрощенной системы двух точечных масс m и M , соединенных пружиной с жесткостью "K". Жесткость K пружины (с жесткостью прокладки) равна:

$$K = \frac{ES}{h}.$$

Пусть x_1 и x_2 – смещение масс m и M вдоль оси OX (см. рис. 1,б) относительно масс в невозмущенном состоянии, тогда из уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + f(x) = F, \\ \ddot{x}_2 + \varphi(x) = F \end{cases} \quad (1)$$

получим

$$\begin{cases} \ddot{a}_1 = \ddot{x}_1 = -\frac{K\Delta x}{m} + \frac{F}{m} = \frac{K}{m}(x_2 - x_1) + \frac{F_0}{m} \sin \omega t, \\ \ddot{a}_2 = \ddot{x}_2 = -\frac{K\Delta x}{M} = \frac{K}{M}(x_1 - x_2). \end{cases} \quad (2)$$

Для простоты примем, что координаты x_1 и x_2 подчиняются условиям гармонических колебаний, т.е. $x_1 = A_1 \sin \omega t$, $x_2 = A_2 \sin \omega t$, где A_1 и A_2 – амплитуды колебаний масс m и M , соответственно. Подставив эти выражения в (2), получим

$$\begin{cases} \left(-\omega^2 + \frac{K}{m}\right)A_1 - \frac{K}{m}A_2 = \frac{F_0}{m}, \\ -\frac{K}{m}A_1 + \left(-\omega^2 + \frac{K}{m}\right)A_2 = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} -\omega^2 A_1 - \frac{K}{m}(A_1 - A_2) = \frac{F_0}{m}, \\ -\omega^2 A_2 - \frac{K}{m}(A_1 - A_2) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Отсюда находим:

$$A_1 - A_2 = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{-\omega^2 + \frac{K(m+M)}{mM}} = \frac{F_0}{m(\omega_p^2 - \omega)}, \quad (4)$$

где ω_p – резонансная круговая частота гармонических колебаний системы масс, соединенных амортизатором 3 (см. рис. 1а). В случае приближенного равенства масс $m \approx M \approx \tilde{m}_p$ резонансную частоту можно оценить по формуле:

$$\omega_p \approx \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{K}{\tilde{m}_p}}. \quad (5)$$

В этом случае амплитуда A_2 будет равна:

$$A_2 = \frac{F_0}{(m+M)\omega^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2 - 1}. \quad (6)$$

В отсутствие амортизатора сила F сообщает системе "вибратор-порода" с массой $(m+M)$ ускорение:

$$|\bar{a}_0| = \frac{|\bar{F}|}{m+M}. \quad (7)$$

Амплитуду колебаний в этом случае находим из условия $a_0 = -\omega_2 A_0 \sin \omega t$:

$$A_0 = \frac{F}{(m+M)\omega^2}. \quad (8)$$

Таким образом, отношение амплитуд смещения виброрыхлителей с амортизаторами равно

$$\frac{A_2}{A_0} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{f}{f_p}\right)^2}, \quad (9)$$

где

$$f_p = \frac{1}{2\pi} \omega_p = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{\tilde{m}_p}} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \sqrt{\frac{ES}{hm}} \quad (10)$$

График функции $y = \frac{1}{1-x^2}$ (где $x = \frac{f_i}{f_{рез}}$) представлен на рис. 2. Из рисунка видно, что при приближении частоты действующей силы к резонансной частоте функция, характеризующая усиление амплитуды колебаний $\varphi(A_2/A_1)$, терпит разрыв в точке $f_i = f_{рез}$.

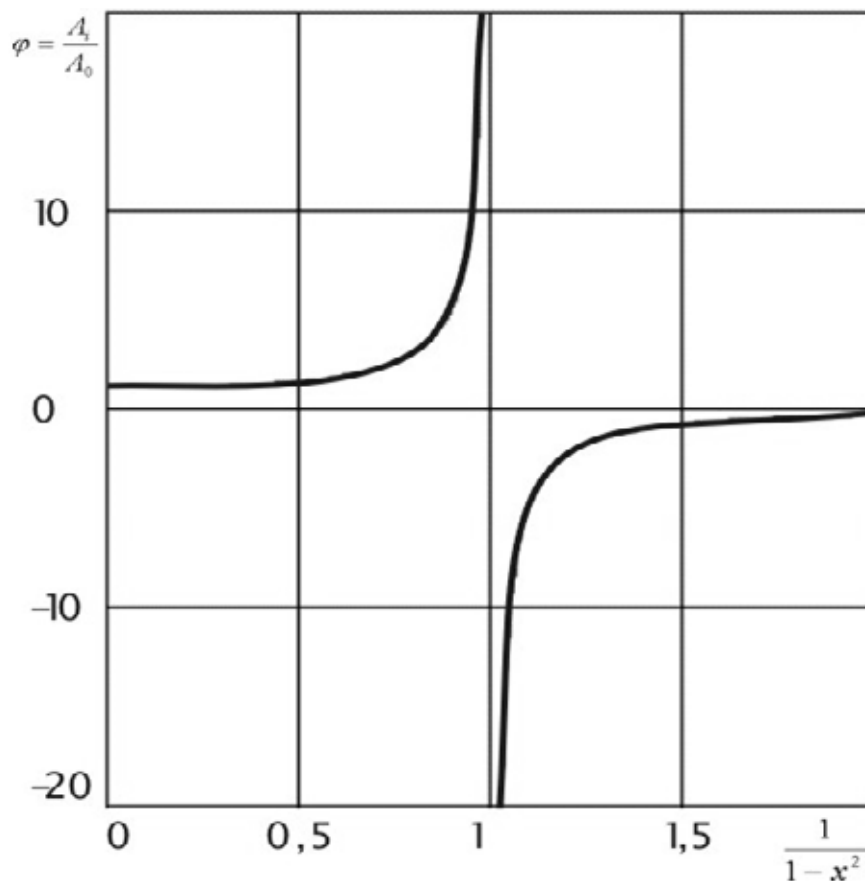


Рис.2 – График зависимости A_i/A_0 от $\frac{1}{1-x^2}$

Модельное решение данной задачи ограничивалось условиями гармонических колебаний. Кроме того, не учитывалась демпфирующая сила, пропорциональная некоторой функции $f_1(\dot{x})$ и восстанавливающая сила, пропорциональная произвольной функции перемещения $f_2(x)$. В общем случае на массу M (см. рис. 1) действует возмущающая сила в виде периодической функции $f_3(t)$, в этом случае, следуя результатам работы [11,12], уравнение движения можно записать в виде:

$$\ddot{x} + 2nf_1(\dot{x}) + \omega^2 f_2(x) = f_3(t), \quad (11)$$

где слагаемые соответствуют отнесенным к единице массы M - силам инерции, сопротивлению движения $2nf_1(\dot{x})$ и восстанавливающей внешней силы. Для решения уравнения (11) воспользуемся способом приближенного исследования колебаний (методом Ритца) [21], который предполагает, что среднее значение полной работы за цикл равно нулю. Метод усреднения Ритца дает более точное решение, чем метод последовательных приближений или вариационный метод Галлеркина [12,13].

Основным достоинством данного метода является тот факт, что с его помощью исследуют как свободные, так и вынужденные колебания систем. Сущность данного метода описана в работах [12-15].

Рассмотрим задачу (уравнение 11), описываемую уравнением Дюффинга с вязким сопротивлением, где сила демпфирования пропорциональна скорости (с коэффициентом пропорциональности n , а сила упругости будет пропорциональна x^3 , что соответствует "жесткой" характеристике $F_x = -(c_1x + c_3x^3 + c_5x^5 \dots)$, т.е. в случае "жесткой" характеристики силы упругости можно записать [13]

$$\ddot{x} = k^2x + \gamma x^3 + \rho x^5 + \dots = 0. \quad (12)$$

Выбор "жесткой" характеристики обусловлен выбором резинового амортизатора 3 (см. рис. 1).

В этом случае уравнение (11) можно переписать в виде [12]:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2(x \pm \mu x^3) = q \cos \omega_0 t. \quad (13)$$

Установившееся состояние при вынужденных колебаниях теперь будет включать в себя фазовый угол ψ , и поэтому первое приближение берут обычно в виде [12]:

$$x = c_1 \cos(\omega_0 t - \psi) = a_1 \cos \omega_0 t + b_1 \sin \omega_0 t, \quad (14)$$

где
$$c_1^2 = a_1^2 + b_1^2, \quad \text{tg} \psi = b_1 / a_1.$$

Для нахождения двух постоянных a_1 и b_1 используют систему двух уравнений:

$$\begin{cases} \int_0^r [\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2(x \pm \mu x^3) - q \cos \omega_0 t] \cos \omega_0 t dt = 0, \\ \int_0^r [\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2(x \pm \mu x^3) - q \cos \omega_0 t] \sin \omega_0 t dt = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Причем интегрирование ведут по интервалу времени, равному длительности одного цикла. Подставим в эти уравнения выражения для первого приближения (уравнение 14)

$$\left[\int_0^r \left[a_1 \cos \omega_0 t + b_1 \sin \omega_0 t \right]'' + 2n \left[a_1 \cos \omega_0 t + b_1 \sin \omega_0 t \right]' + \right. \\ \left. + \omega^2 [a_1 \cos \omega_0 t + b_1 \sin \omega_0 t] + \mu \omega^2 [a_1 \cos \omega_0 t + b_1 \sin \omega_0 t]^3 - q \cos \omega_0 t \right] \times \\ \times \cos \omega_0 t dt = 0,$$

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^r \left[[a_1 \cos \omega_0 t + b_1 \sin \omega_0 t]'' + 2n[a_1 \cos \omega_0 t + b_1 \sin \omega_0 t]' + \right. \\ & \left. + \omega^2 [a_1 \cos \omega_0 t + b_1 \sin \omega_0 t] + \mu \varpi^2 [a_1 \cos \omega_0 t + b_1 \sin \omega_0 t]^3 - q \cos \omega_0 t \right] \times \\ & \left. \times \sin \omega_0 t dt = 0 \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

и проинтегрируем их с учетом интегралов [12]:

$$\begin{aligned} \int_0^r \cos^2 \omega t dt &= \frac{1}{\omega} \int_0^{2\pi} \cos^2 \omega t d(\omega t) = \frac{\pi}{\omega}, \\ \int_0^r \cos^4 \omega t dt &= \frac{1}{\omega} \int_0^{2\pi} \cos^4 \omega t d(\omega t) = \frac{3\pi}{4\omega}. \end{aligned} \quad (17)$$

В результате получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1 \omega_0^2 - 2n\omega_0 b_1 - \omega a_1 \pm \frac{3\omega^2 \mu a_1 c_1^2}{4} + q = 0, \\ b_1 \omega_0^2 - 2n\omega_0 a_1 - \omega b_1 \pm \frac{3\omega^2 \mu b_1 c_1^2}{4} = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Для нахождения фазового угла ψ , используя соотношения (14) $a_1 = c_1 \cos \psi$ и $b_1 = c_1 \sin \psi$, подставим их в выражение (18), получим:

$$\begin{cases} 2n\omega_0 c_1 \sin \psi + \left(-\omega_0^2 + \omega^2 \pm \frac{3\omega^2 \mu c_1^2}{4} \right) c_1 \cos \psi - q = 0, \\ -2n\omega_0 c_1 \cos \psi + \left(-\omega_0^2 + \omega^2 \pm \frac{3\omega^2 \mu c_1^2}{4} \right) c_1 \sin \psi = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Умножим первое уравнение (19) на $\cos \psi$, а второе уравнение (19) на $\sin \psi$ и почленно их складывая, получим

$$-\omega_0^2 + \omega^2 \pm \frac{3\omega^2 \mu c_1^2}{4} = \frac{q}{c_1} \cos \psi. \quad (20)$$

С другой стороны, умножая второе уравнение на $\cos \psi$, а первое на $\sin \psi$ и вычитая из первого уравнения второе, найдем

$$2n\omega_0 = \frac{q}{c_1} \sin \psi. \quad (21)$$

Возводя уравнения (20) и (21) в квадрат и складывая их, найдем

$$\left(-\omega_0^2 + \omega \pm \frac{3\omega^2 \mu c_1^2}{4}\right)^2 + 4n^2 \omega_0^2 = \left(\frac{q}{c_1}\right)^2. \quad (22)$$

Почленно разделив (20) на (21), определим фазовый угол ψ :

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{2n\omega_0}{-\omega_0^2 + \omega^2 \pm \frac{3\omega^2 \mu c_1^2}{4}}. \quad (23)$$

Уравнения (22) и (23) связывают амплитуду колебаний c_1 и фазовый угол ψ с частотой ω_0 возмущающей силы для произвольно заданных частот ω упругих составляющих μ - величины, учитывающей коэффициент при x_3 и n - величины, учитывающей сопротивление грунта.

Если постоянную n принять равной нулю, то получим, что фазовый угол ψ примет значение 0 или π , а $b_1 = 0$ и $c_1 = a$, тогда уравнение (22) переписется в виде:

$$\omega^2 c_1 \pm \frac{3\omega^2 \mu c_1^3}{4} = \omega_0^2 c_1 + q \quad (24)$$

или для веществ с возрастающей жесткостью

$$\frac{3\mu c_1^3}{4} = \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1\right) c_1 + \frac{q}{\omega^2}. \quad (25)$$

Для построения графика частотной характеристики с возрастающей жесткостью, преобразуем уравнение (22) в следующем виде:

$$\frac{3\mu c_1^3}{4} = \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1\right) c_1 + \frac{q}{\omega^2} \sqrt{1 - \frac{(2n\omega_0 c_1)^2}{q^2}}. \quad (26)$$

Для построения графика определим точку пересечения кривых 1 и 2 по уравнениям (см.рис. 3а)

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1^2 = \frac{4}{3\mu} \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 \right) \quad a); \\ c_1 = \frac{q}{2n \left(\frac{\omega_{рез}}{\omega} \right) \omega} \approx \frac{q}{2n\omega_{рез}} \quad б). \end{array} \right. \quad (27)$$

Уравнение (27.б) описывает семейство гипербол в плоскости c_1 и ω_0 / ω . Следовательно, для любого конкретного значения величины $q/2n\omega$ можно построит гиперболу по уравнению (27.б). Ее пересечение с кривой для свободных колебаний даст приближенно максимальное значение, которое может достичь амплитуда при установившихся вынужденных колебаниях. Следует отметить, что в системах с малым демпфированием теоретическое условие резонанса, представленное точкой A (см. рис. 3.б), может в действительности оказаться недостижимым из-за возникновения перескока вниз к точке A_1 . Таким образом, в диапазоне абсциссы $\frac{\omega_{кр}}{\omega_1}$ и $\frac{\omega_{кр}}{\omega_2}$

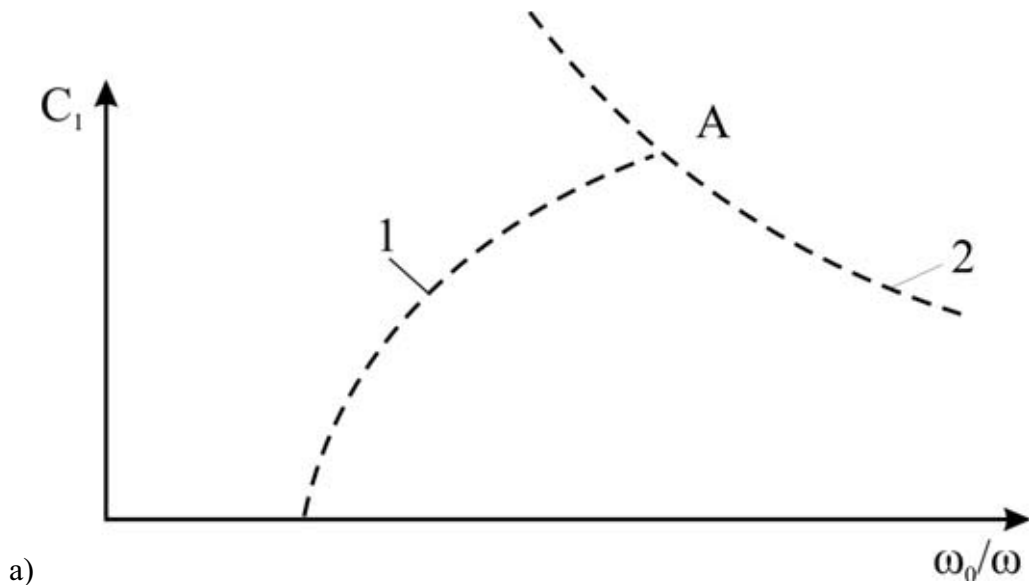
ω_1 и ω_2 при наличии внешних возмущений, вызванных сопротивлением среды, возможен преждевременный перескок, тем самым исключая возможность возникновения действительного резонанса. Кроме того, при резонансе фазовый угол, теоретически равный $\psi=2\omega$, в реальных условиях изменяется (в этом диапазоне частот) скачком при возникновении перескока в системе. В любом слу-

чае диапазон частот, занимающий область $\frac{\omega_{кр} \cdot \Delta\omega}{\omega_1\omega_2}$, является непригодным с точки зрения устойчивости работы системы.

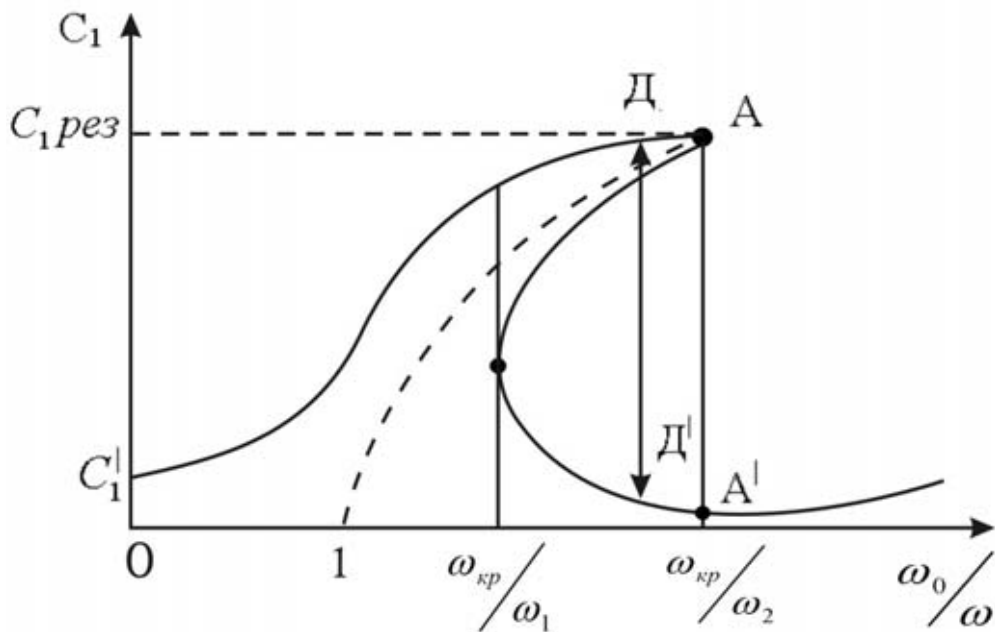
Из рис. 3,б видно, что для диапазона значений $C_1 = f(\omega_0 / \omega)$ в области определения функций $\omega_0 / \omega \in [\omega_k / \omega_1]$ функция C_1 является однозначной, а для диапазо-

на $\frac{\omega_k}{\omega_1} < \omega_0 / \omega \in < \frac{\omega_k}{\omega_2}$ - она многозначна, т.е. при движении от точки A к D' система является неустойчивой. Вопросам устойчивости колебаний в литературе уделено значительное внимание [16-21]. В этих работах, в большинстве своем, устойчивость, в терминах теории устойчивости по Ляпунову, рассматривают состояние автономной системы на фазовой плоскости (в системе координат \dot{x}, x). При этом процесс движения механической системы отображается движением изображающей точки на фазовой плоскости, а траекторию изображающей точки называют фазовой траекторией. Совокупность изображающей точки называют фазовой траекторией. Совокупность фазовых траекторий, соответствующих всевозможным начальным условиям, называют фазовой диаграммой или аттрактором. Дифференциальное уравнение фазовых траекторий имеет вид:

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{f(x,t)}{\dot{x}} \quad (28)$$



а)



б)

Рис. 3 – Зависимость амплитуды колебаний c_1 от отношения частот ω_0 / ω

В этом случае состояние равновесия $\dot{x} \equiv 0$ соответствует равенству

$$f(x,0) = 0 \quad (29)$$

Изолированные замкнутые траектории называют предельными циклами, которые являются устойчивыми, если любая фазовая траектория, начинающаяся в

достаточно малой окрестности этого цикла, неограниченно к нему приближается. В противоположном случае предельный цикл называется неустойчивым, при этом движение механической системы, соответствующее неустойчивому предельному циклу, физически нереализуемо [21].

Для нашего случая, когда уравнение движения имеет вид:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega (x \pm \mu x^3) = 0 \quad (30)$$

могут реализоваться три случая при $2n < \omega$, если $\mu > 0$; $2n < \omega$, если $\mu < 0$, и $2n > \omega$, если $\mu < 0$. Фазовая диаграмма для первого случая уравнения при $\mu > 0$ приведена на рис. 4.

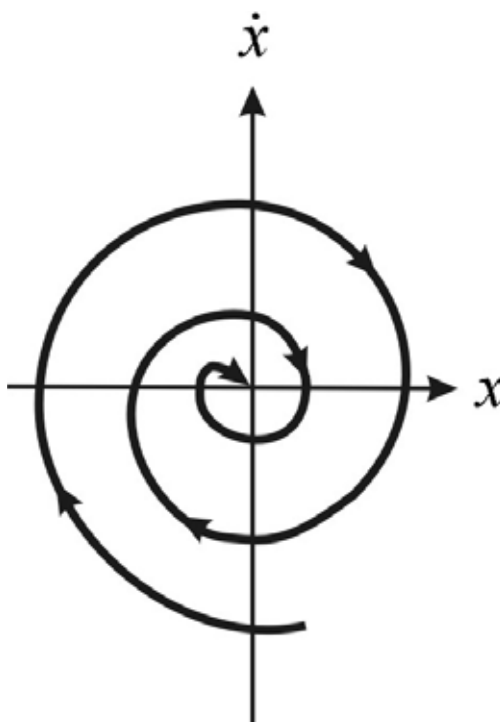


Рис. 4 – Фазовая диаграмма движения вибрирующих стержней, для случая $\mu > 0$

В этом случае реализуется одно положение равновесия (устойчивый фокус), т.е. сопротивление породы значительно меньше упругой восстанавливающей силы. Это состояние реализуется для высоких частот, когда сmerzшиеся частицы угля диспергируют, и система претерпевает фазовый переход из твердого состояния в жидкое (при плавлении льда)

Для второго случая (см. рис. 5) реализуется три положения равновесия (устойчивый фокус и два седла). Этот случай характерен также фазовыми переходами и незначительным коэффициентом внутреннего сопротивления среды.

Третий случай (рис. 6) характеризует три положения равновесия (устойчивый узел и два седла), который может быть реализован в начале первого цикла взаимодействия сmerzшаяся порода – вибрирующие стержни.

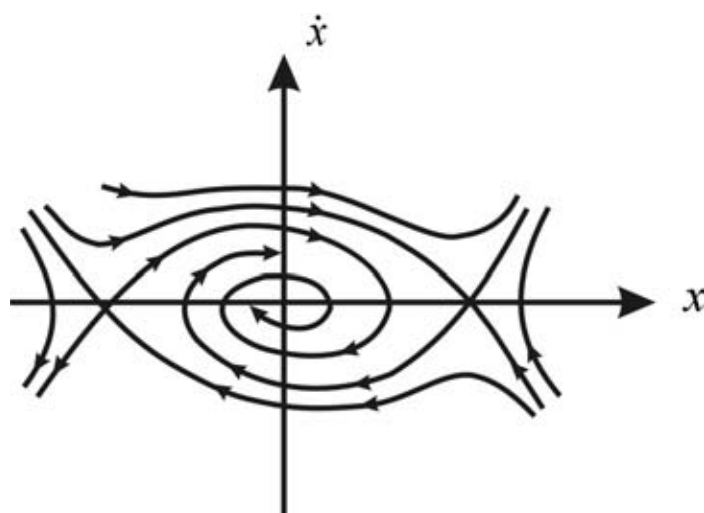


Рис. 5 – Фазовая диаграмма движения вибрирующих стержней, для случая $\mu < 0$ и $2n < \omega$

В любом случае устойчивость вибрирующей системы зависит от четырех параметров - величины и частоты вынужденной силы, характеристик упругой системы и величины сопротивления сходящегося угла. В зависимости от величин

$$\frac{\omega_{кр} \cdot \Delta\omega}{\omega_1 \omega_2}$$

выбранных параметров диапазон частот, занимающий область $\omega_1 \omega_2$, можно либо расширить, что приведет к неустойчивой работе системы, либо сузить, что приведет к тому, что область реализуемых частот расширится с позиций устойчивой работы системы.

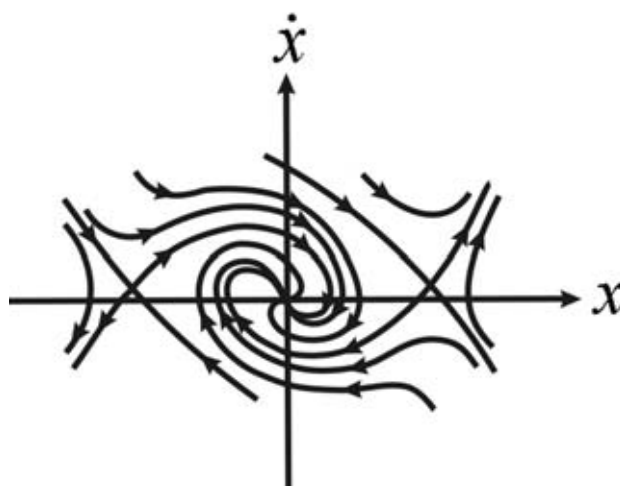


Рис. 6 – Фазовая диаграмма движения вибрирующих стержней, для случая $\mu < 0$ и $2n > \omega$

При практической проверке рекомендаций, разработанный на основе приведенных исследований были установлены оптимальные режимы вибровоздействия для рыхления сходящегося угла в железнодорожных полувагонах. Проверка была выполнена в условиях порта "Южный" при рыхлении сходящихся углей однодольной виброрыхлительной установкой. В процессе выполнения эксперимента был расширен диапазон частот воздействия, при этом, если при включении установки в момент "быстрого" перехода частот воздействия через зону резонанса ам-

плитудные "скачки – срывы" в режиме работы не были значительными, то в момент выключения вибровозбудителя и, соответственно, медленного возвращения системы в нулевое положение и «медленном» переходе через резонанс происходили срывы режима со значительными амплитудами на несущих элементах конструкции виброрыхлительной установки в целом и возникала опасность разрушения этих несущих элементов конструкции.

После установления оптимальных частных режимов воздействия и выдержке их в процессе испытаний виброрыхлительной установки, подобные явления не наблюдалось, а сама виброрыхлительная установка эффективно эксплуатировалась в течении длительного времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Управление динамическими проявлениями горного давления / А.Н. Зорин, В.Г. Колесников, С.П. Минеев, А.А. Прусова, Е.Д. Ковтун.- К.: Наук. думка, 199
2. Бауман В.А., Быховский И.И. Вибрационные машины и процессы в строительстве.- М.: Высшая школа, 1977.- 225 с.
3. Пановко Я.Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем.- М.: Наука, 1980.-190 с.
4. Бабаков И.М. Теория колебаний.- М.:Наука, 1968.- 559 с.
5. Зоммерфельд А. Механика. - М.: Иностранная лит., 1947.-319 с.
6. Кононенко В.О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением.-М.: Наука, 1964.- 254с.
7. Потураев В.Н., Минеев С.П. Пульсационные и волновые эффекты в горном массиве.- К.:Наук.думка,1993.- 142 с.
8. Минеев С.П., Сахненко А.Л., Обухов С.А. Об эффективности разрыхления агрегированного сыпучего груза из полувагонов в зимнее время/ Сб. научн. трудов НГУ №17.- Т.2.- Днепропетровськ: РИК НГУ, 2003.- С.176-182.
9. Сахненко А.Л. О применении способов восстановления сыпучести смерзшихся углей при их транспортировании// Геотехнічна механіка: Міжвід. Зб. наук. праць /Ін-т Гетехнічної механіки НАН України.- Киев: Дніпропетровськ, 2003. - Вип.47.- С.168 – 173.
10. Виброустановка для разгрузки смерзшихся сыпучих материалов из железнодорожных полувагонов/ С.П. Минеев, А.Л. Сахненко, С.А. Обухов и др.//Металлургическая и горнорудная промышленность, 2004.-№3.-С.86-88.
11. Алифов А.А., Фролов К.В. Взаимодействие нелинейных колебательных систем с источниками энергии.- М.: Наука, 1985.-328 с.
12. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле.- М.: Машиностроение, 1985.-472 с.
13. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. т.ІІІ- М.: Наука, 1973.-488 с.
14. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости.- М.: Наука, 1975.- 576 с.
15. Бабицкий В.И. Теория виброударных систем. - М.:Наука,1978.-352 с.
16. Барабашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 223 с.
17. Краснов М.Л., Макаренко Г.И. Операционные исчисления. Устойчивость движения. – М.: Наука, 1964. – 103 с.
18. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 384 с.
19. Пановко Я.Т., Губанов И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. – М.: Наука, 1987. – 352 с.
20. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966. – 530 с.
21. Вибрации в технике. Под ред. д-ра физ. мат. наук И.И. Блехмана. Том 2. – М.: Машиностроение, 1979. – 351 с.
22. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости // А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер.- М.: Наука, 1967.- 487 с.