2. Д. Литал. Применение горячей асфальтовой смеси в пути на слабых грунтах // Железные дороги мира. М. № 1. – 2003. – С. 63-66.

3. Т. Джей. Геосинтетические материалы с улучшенными функциональными характеристиками // Железные дороги мира. Журнал. М. № 2, 2003. – С. 65-66.

4. Д. Литал. Проблемы устойчивости пути Железные дороги мира. Журнал. М. № 12, 2003. – С. 69-71.

УДК 656.22:519.674

Канд. техн. наук В.В. Говоруха,
інж. Д.К. Овчаренко
(ІГТМ НАН України)

ОПТИМІЗАЦІЯ ЦИКЛІЧНИХ МАРШРУТІВ РУХУ ВАНТАЖНИХ ПОТЯГІВ

Статья посвящена разработке методологии построения оптимальних циклических маршрутов железнодорожного транспорта. Авторами разработана и подробно описана методология построения маршрутов движения грузовых поездов. При этом основными проблемами, которые рассматриваются в статье, является обоснование выбора метода построения циклического маршрута с точки зрения его эффективности, разработка алгоритма построения оптимальных маршрутов и реализация этих алгоритмов на ЭВМ.

OPTIMIZATION OF CYCLIC ROUTES OF MOTION OF FREIGHT TRAINS

The article is devoted to development of methodology of construction of optimal cyclic routes of railway transport. By authors is developed and methodology of construction of routes of motion of freight trains is written up. Thus by basic problems, which are examined in the article there is the ground of choice of method of construction of cyclic route from point of his efficiency, development of algorithm of construction of optimum routes and realization of these algorithms on computer.

Залізничному транспорту належить провідна роль у перевізних процесах здійснюваних транспортною системою України. Його питома вага в загальному вантажообігу всіх видів транспорту України на сьогодні становить 89,1 %. Вантажообіг у 2002 р. досяг 193,1 млрд. т·км, що на 8,8% більше в порівнянні з 2001 р. За сім місяців 2003 р. обсяги перевезень залізницями збільшилися на 13,4% , відправлення вантажів – на 9,4% і продовжують зростати [1, 2].

Як свідчить практика циклічні маршрути руху потягів є досить розповсюдженими і тому побудова раціональних маршрутів є дуже актуальною проблемою. Серед усіх циклічних маршрутів має сенс виділити побудову маршруту вантажного потягу, який доставляє сировину по місцях її споживання.

Задача, яка розглядається у статті, полягає в наступному: вантажний потяг призначено для перевезення вугілля із Донецького басейну між містами Кіровоград, Кривий Ріг, Запоріжжя, Дніпропетровськ, Полтава, Харків, Луганськ (рис. 1).

Потяг завантажують у Донецьку і він об’їжджає міста, де його поступово розвантажують, і після цього повертається знову у Донецьк під нове завантаження. Головною умовою для маршруту потягу є те, що він має за один цикл доставити сировину у кожне місто. Вартість перевезення пропорційна відстані, яку подолає потяг, розвозячи вугілля. Розв'язком цієї задачі буде циклічний маршрут, який проходить через кожне місто рівно один раз і має найменшу довжину. Наша задача полягає у розробці такого маршруту потягу, або у знаходженні усіх можливих маршрутів і вибору з них маршруту мінімальної довжини.

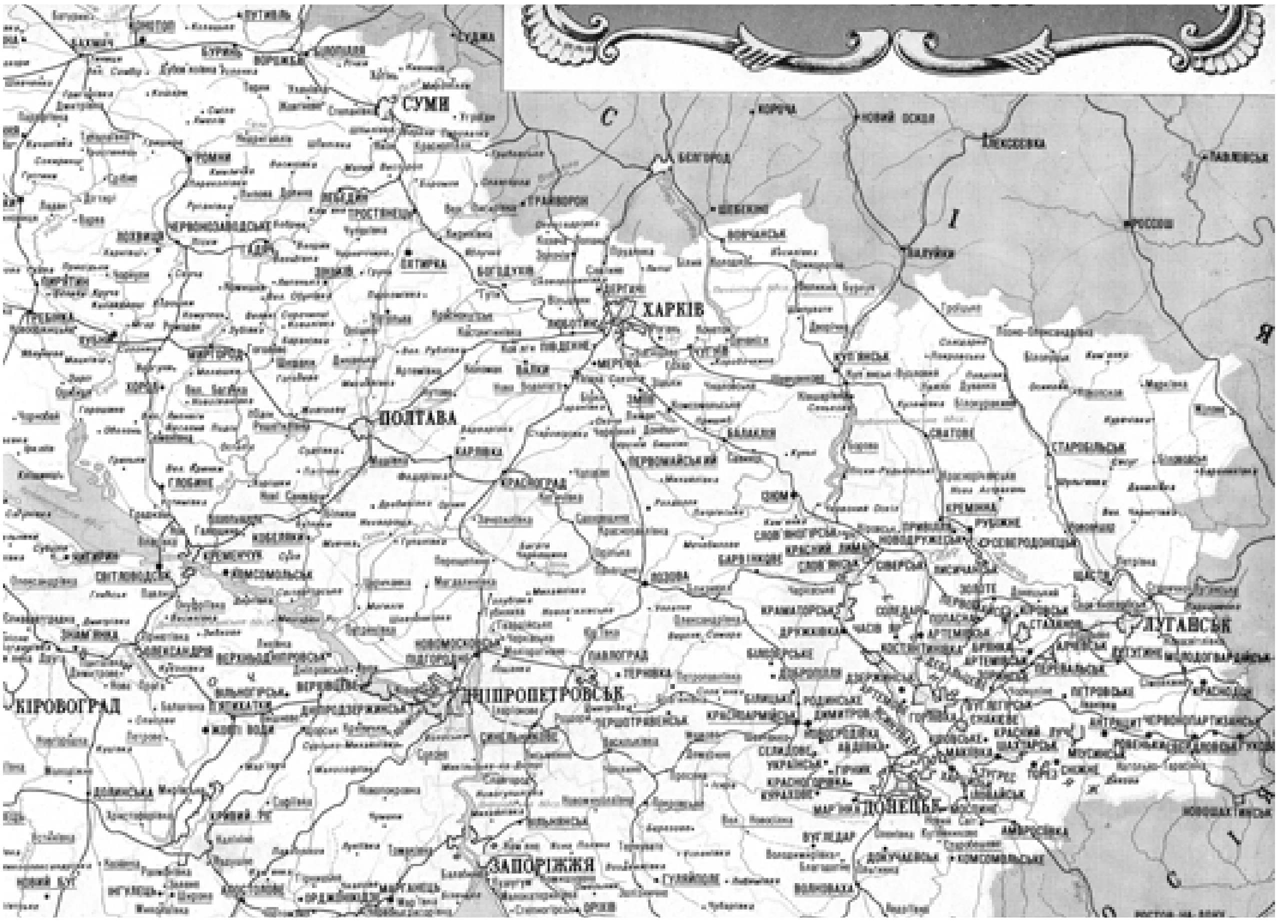


Рис. 1 – Розташування міст маршруту.

Розглянемо дану задачу за допомогою теорії графів. Залізницю будемо інтерпретувати як граф вершинами якого будуть міста, а ребрами – залізничні колії, що ці міста з'єднують. У цьому графі треба знайти гамільтонів цикл мінімальної довжини, тобто такий цикл що проходить через кожну вершину графа рівно один раз [3].

Опишемо математичну модель задачі:

Вантажному потягу необхідно відвезти сировину у n пунктів споживання, починаючи і закінчуючи свій маршрут пунктом *1*. Позначимо $c_{ij} \geq 0$ – відстань між пунктами i та j, прийнявши $c_{ij} = \infty$ якщо прямого маршруту між пунктами i та j не існує. У деяких випадках може бути що $c_{ij} \neq c_{ji}$. Оптимізаційна задача полягає в пошуку гамільтонового циклу з мінімальною довжиною.

Означимо булеві змінні наступним чином:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \textit{якщо цикл містить переїзд із пункту } i \textit{ в пункт } j \\ 0 & \textit{у протилежному випадку} \end{cases}$$

Цільова функція матиме наступний вигляд:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min \text{, де} \quad c_{ii} = \infty \qquad i = 1, 2, ..., n \tag{1}$$

Змінні повинні задовольняти обмеженням

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad \text{i = 1, 2, ..., n} \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad \text{j = 1, 2, ..., n} \tag{3}$$

$$x_{ij} \text{ – невід'ємні цілі при будь–якому і та} \tag{4}$$

Обмеження (2)–(4) гарантують рівність кожної змінної x_{ij} або 0 або 1. Співвідношення (2) вимагають щоб цикл містив у собі рівно один виїзд із кожного пункту, аналогічно співвідношення (3) вимагають рівно одного приїзду в кожен пункт.

Хоч змінні x_{ij} в будь–якому циклі мають задовольняти вказаним вище обмеженням, припустимий при цих обмеженнях розв'язок не обов'язково буде циклом. Зокрема, припустимий розв'язок що задовольняє умовам (2), (3), (4), може містити два і більше не зв'язаних між собою циклів чи підциклів. Тому необхідно ввести додаткові обмеження, які гарантують отримання рішення у вигляді циклу.

Введемо змінні u_i, *i = 2, 3, ..., n*, і накладемо на них наступні $(n-1)^2 - (n-1)$ умов:

$$u_i - u_j + nx_{ij} \le n - 1, \tag{5}$$

$$i = 2, 3, ..., n. \qquad j = 2, 3, ..., n. \qquad (i \neq j)$$

Для того щоб усунути виникнення підциклів на змінні u_i не треба накладати ніяких додаткових обмежень але накладення умов невід'ємності та цілочисельності не завдасть ніякої шкоди. В умовах (2)–(5) містяться $n^2 - n + 2$ лінійних обмеження і $n^2 + n - 1$ цілочисельних змінних, із яких *n* змінних x_{ii} мають дорівнювати нулю. Механізм дії обмежень (5) не досить очевидний, обґрунтуємо його.

Для демонстрації ефективності цих обмежень треба довести два твердженняня: а) ці обмеження дійсно виключають усі підцикли; б) жоден повний цикл не виключається. Розглянемо ці твердження послідовно.

Перш за все обмеження (2) – (5) виключають можливість появи усіх підциклів між пунктами *2, 3, ..., n.* Для того щоб переконатися у цьому, розглянемо будь – який цикл між *к* із цих пунктів, який обумовлюється значеннями $x_{ij}=1$ для *к* змінних. Додамо до (5) *к* обмежень які відповідають змінним утворюючим підцикл. Цьому загальному обмеженню має також задовольняти кожен розв'язок припустимий по обмеженню (5). Для кожного із *к* пунктів в отриманій сумі фігурують величини u_i і $(-u_i)$. Отже у загальному обмеженні немає жодної величини u_i. Однак це не припустимо для усіх $x_{ij}=1$ у цьому обмеженні, тому що тоді сума у лівій частині нерівності, що дорівнює *nk,* буде більшою ніж сума у правій частині нерівності, яка дорівнює *(n – 1)k*. Отже умова (5) виключає можливість появи будь – якого підциклу.

Це доведення легко проілюструвати на прикладі, розглянувши підцикл між пунктами 2, 3, 4, 2, якому відповідають значення змінних $x_{23}=x_{34}=x_{42}=1$. Відповідні обмеження у (5) при *к=3* мають вигляд

$$u_2-u_3+nx_{23}\le n-1,$$
$$u_3-u_4+nx_{34}\le n-1$$
$$u_4-u_2+nx_{42}\le n-1$$

Склавши ці обмеження отримаємо загальне обмеження

$$(u_2-u_3+u_3-u_4+u_4-u_2)+n(x_{23}+x_{34}+x_{42})\le(n-1)$$
$$n(x_{23}+x_{34}+x_{42})\le(n-1)$$

А цей вираз виключає можливість того що

$$x_{23}=x_{34}=x_{42}=1$$

Покажемо тепер, що обмеження (2)–(5) не призводять до усунення жодного повного циклу. Для цього достатньо встановити, що існують значення u_i, які задовольняють обмеженню (5), для будь – якого заданого циклу. Розглянемо такий цикл який за означенням полягає у відвіданні кожного пункту *2, 3, ..., n* один і тільки один раз. Нехай t_i це положення в такому циклі, коли потяг прибуває у пункт *i,* причому для пункту 1 приймемо t_i=1. тоді у циклі *пункт 1 – пункт 3 – пункт 5 ...*значення будуть дорівнювати $t_1=1$, $t_3=2$, $t_5=3$, ... За такої умови $u_i=t_i$, *i=2, 3, ... n,* є припустимою множиною значень t_1. Для того щоб переконатися в цьому, припустимо, що у даному циклі $x_{ij}=1$, так що $t_j=t_i+1$. Тоді обмеження для цього x_{ij} у (5) задовольняється оскільки

$$t_i - (t_i + 1) + n(1) \le n - 1$$

Припустимо тепер що x_{ij}=0. Тоді відповідна нерівність у (5) приймає вигляд ($u_i - u_j \le n - 1$). Ця нерівність має виконуватися оскільки $u_i < n$ і $u_j > 1$.

Тим самим ми показали що введені нами обмеження є коректними [5].

Розглянемо алгоритм побудований на основі методу гілок та меж.

Ідея методу гілок та меж, стосовно до нашої задачі досить проста. Розгалуження ґрунтується на наступному міркуванні: переїзд із будь-якого даного пункту *i* у будь-який інший пункт *j* може або належати оптимальному маршруту потяга, або не належати йому. При обчисленні меж використовується той факт, що зміна довжин усіх шляхів, що приводять у деякий пункт, і всіх шляхів, що виводять із нього, на ту ж саму величину приводить до нової задачи, оптимальні плани якої збігаються з оптимальними планами вихідної задачи.

Алгоритм.

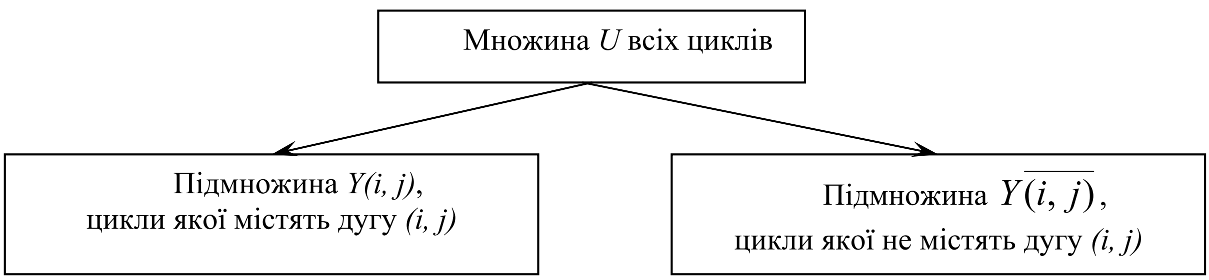
1. Зводимо матрицю відстаней *D* поданого графа*,* тобто

а. Від кожного елементу кожного рядка віднімаємо мінімальний елемент h_i цього ж рядка (зведення за рядками)

б. Від кожного елементу кожного стовпця після зведення по рядках віднімаємо мінімальний елемент g_i цього ж стовпця(зведення за стовпцями)

2. Обчислюємо оцінку L^* вартості усіх гамільтонових циклів за формулою $L^* = \sum_i h_i + \sum_j g_j$

3. Визначаємо оцінки усіх нульових елементів $d_{ij} = 0$ зведеної матриці D . Оцінка $d_{ij} = 0$ дорівнює сумі найменших елементів і- го рядка та j- го стовпчика за винятком самого нульового елемента d_{ij}



4. Нехай d_{ij}–нульовий елемент, що має найбільшу оцінку. Розбиваємо множину U усіх гамільтонових циклів на підмножини *Y(i,j)* та $Y(\overline{i, j})$.

5. Будуємо матриці відстаней цих підмножин. Матриця відстаней D_1 підмножини *Y(i,j)* може бути побудована із зведеної матриці *D* шляхом викреслення *i*- го рядка та *j*- го стовпчика. Матриця відстаней $D_1^{'}$ підмножини $Y(\overline{i, j})$ може бути одержана із зведеної матриці *D* графа, якщо покласти $d_{ij} = \infty$.

6. Зводимо матрицю відстаней підмножини $\overline{Y(i,j)}$ за рядками і стовпчиками.

7. Визначаємо оцінки підмножин *Y(i,j)* та $Y(\overline{i,j})$ за формулами .

$$L_1' = L(Y(i,j)) = L^* + \theta_{ij} \qquad L_2' = L(Y(\overline{i,j})) = L^* + \nabla_{ij}$$

де θ_{ij} – сума констант зведення матриці відстаней D_1 підмножини $Y(i,j)$; ∇_{ij} – сума найменших елементів *i*- го рядка та *j*- го стовпчика у зведеній матриці відстаней множини *U*.

8. Обираємо з двох підмножин *Y(i,j)* та $Y(\overline{i,j})$ ту що має найменшу оцінку та ще й нерозгалужена (позначимо цю множину *Z*). Виконуємо для цієї підмножини кроки 3, 4, 5, 6, 7, 8. Процес закінчується, якщо буде знайдено підмножину, складену з одного циклу, що має найменшу оцінку, або всі нерозгалужені підмножини матимуть оцінку $+\infty$ (у цьому випадку задача не має розв'язку). Вимірність 2×2 матриці відстаней множини *Z* –ознака того, що множина *Z* складається з одного циклу [4].

За цим алгоритмом мовою С++ складено програму побудови оптимальних маршрутів потягів.

Розглянемо розв'язання задачі :

Нехай нам потрібно доставити вугілля Донецького басейну по містам Кривий Ріг, Кіровоград, Запоріжжя, Дніпропетровськ, Полтава, Харків, Луганськ. Розглянемо дану задачу за допомогою теорії графів. Залізницю будемо інтерпретувати як граф вершинами якого будуть міста, а ребрами – залізничні колії, що ці міста з'єднують (рис. 2).

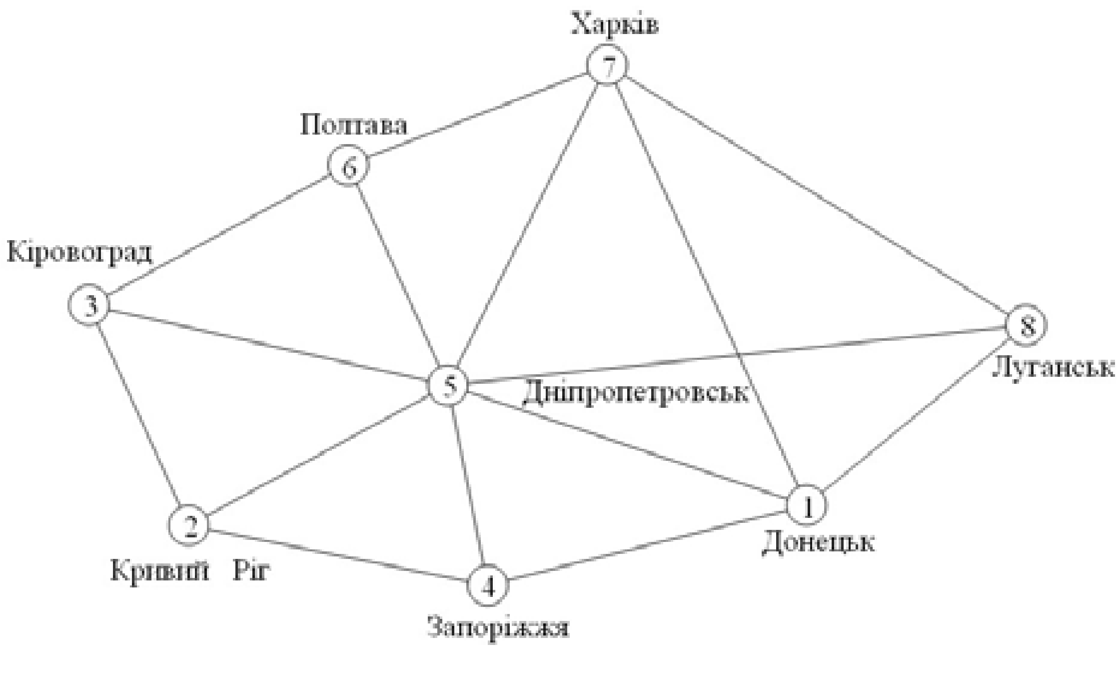


Рис. 2 – Схема розташування міст маршруту

Відстані між цими містами подані у наступній таблиці:

Таблиця № 1 – Відстані між містами.

	Донецьк	Кіровоград	Кривий Ріг	Запоріжжя	Дн-вськ	Полтава	Харків	Луганськ
1.Донецьк		496	447	243	250	391	283	151
2. Кривий Ріг	496		150	180	200	380	450	600
3.Кіровоград	447	150		314	246	251	396	647
4.Запоріжжя	243	180	314		89	277	303	394
5.Дн-вськ	250	200	246	89		183	222	401
6.Полтава	391	380	251	277	183		144	493
7.Харків	283	450	396	303	222	144		330
8.Луганськ	151	600	647	394	401	493	330	

Результатом роботи програми є послідовність номерів міст яка визначає циклічний маршрут мінімальної довжини який проходить по усіх містах рівно по одному разу а саме: *1-7-6-3-2-4-5-8-1,* також підраховується довжина маршруту: *1649* км.

За отриманою послідовністю будуємо оптимальний маршрут потягу: Донецьк – Харків – Полтава – Кіровоград – Кривий Ріг – Запоріжжя – Дніпропетровськ – Луганськ – Донецьк.

Таким чином маршрут доставки вугілля Донецького басейну по заданих містах визначено. З отриманої послідовності міст видно що у Кривому Розі можна до потягу приєднувати вагони з рудою, яку він доставить у Дніпропетровськ, Донецьк та Луганськ.

Треба зазначити що описаний алгоритм і розроблене за ним програмне забезпечення можна застосовувати для побудови оптимальних циклічних маршрутів для будь – якої кількості міст і для як завгодно великих відстаней між містами. Враховуючи цей факт маршрути можна поширити на міста через які проходять міжнародні транспортні коридори (МТК), таким чином Україна може з максимальною вигодою реалізувати своє географічне положення й транзитний потенціал транспортної системи, як сухопутного моста між Європою та Азією.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.

1. Г. М. Кірпа, Інтеграція залізничного транспорту України у європейську транспорту систему. – Дніпропетровськ. 2004.
2. Г. М. Кірпа, Залізниці світу. – Дніпропетровськ. 2004.
3. Н. Кристофидес. Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: Наука, 1978.
4. Литтл Дж., Мурти К., Суини Д., Кэрел К., Алгоритм для решения задачи коммивояжера.// Экономика математические методы, 1965. – №1. – С. 94-107.
5. Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н. Комбинаторные алгоритмы.– М.: Мир, 1980.