

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЗИНОВОЙ ФУТЕРОВКИ МЕЛЬНИЦ ПРИ УДАРНЫХ НАГРУЗКАХ

Розглянуто дві феноменологічні моделі взаємодії шарів та гумової футеровки.

EXPLORATION OF A RUBBER LINING OF MILLS AT IMPULSIVE LOADS

Two phenomenological models of interaction of spheres and rubber lining are considered.

1 Введение

В барабанных рудоизмельчительных мельницах футеровка играет весьма важную роль: во-первых, как элемент защиты от износа и ударных нагрузок и, во-вторых, как элемент, физико-механические и морфометрические параметры которого влияют непосредственно на процесс измельчения материала. От ее морфометрических параметров и долговечности зависят не только срок службы мельниц в целом, но и их технологические характеристики процесса измельчения. В качестве материала для изготовления футеровок используют самые различные конструкционные материалы, в последние годы преимущественно резины и стали. Начиная со середины прошлого века, резина заняла прочное место как материал для изготовления защитных футеровок, во многих случаях вытесняя лучшие сорта стали. Этому способствует ее высокая усталостная прочность, износостойкость, технологичность изготовления, простота монтажно-демонтажных работ, сравнительно низкая стоимость и т.д. [1].

История исследования взаимодействия шара и плоскости восходит к временам Ньютона и Сен-Венана. В кратком изложении эмпирические обобщения выглядят следующим образом [2, 3]:

1. Ньютон предложил ввести коэффициент восстановления скорости при ударе, который зависит исключительно от внутренних свойств веществ соударяющихся тел и не зависит от кинематических характеристик движения тел в момент времени, предшествующий удару.

2. Сен-Венан использовал методы теории упругости для изучения процесса соударения твердых тел. Им было найдено отклонение коэффициента восстановления от Ньютоновского. Оказалось, что оно зависит не от свойств веществ соударяющихся тел, а от перераспределения механической энергии в консервативной системе.

3. Герц решал статическую контактную задачу и распространял полученные результаты на динамическое контактное взаимодействие. Он полагал, что эффекты, определяющие развитие процесса удара охватывают лишь небольшие области внутри тел, примыкающие к поверхности контакта. Остальные части тел не деформируются при ударе, т.е. движутся как абсолютно твердые тела.

4. Теория Герца была развита в работах А.Н. Динника, С.П. Тимошенко и Н.А. Кильчевского.

5. В настоящее время разработкой и расчетом резиновых футеровок (РФ) занимаются Чижик Е.Ф. и Надутый В.П. [4].

Целью настоящей статьи является сравнение феноменологических моделей взаимодействия шара и РФ при центральном ударе и вдавливании, построение алгоритма расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) РФ при вдавливании в нее металлического шара.

2 Физические модели удара

Взаимодействие отдельных элементов (шары, куски руды) внутримельничной загрузки будем моделировать системой «шар – плоскость». Рассмотрим две основные модели, наиболее полно характеризующие эту систему.

2.1 Модель Герца-Динника для удара шара о плоскость

Применительно к рассматриваемому случаю наиболее удобно исследовать прямой центральный удар двух упругих тел, т.е. удар шара о тело бесконечно большой массы, ограниченное плоскостью. Такая задача обычно сводится к рассмотрению процесса соударения двух материальных точек с находящимся между ними упругим элементом. Этот упругий элемент моделируется пружиной. Такая модель имеет явные недостатки, но на сегодняшний день это, пожалуй, единственная модель, позволяющая исследовать локальные процессы при вдавливании или соударении двух упругих тел. Правильность ее подтверждена во многих работах [2, 3, 5, 6].

Рассмотрим прямой центральный удар двух тел массами m_1 и m_2 , движущимися со скоростями V_1 и V_2 . При соприкосновении тел они начнут деформироваться: кинетическая энергия относительного движения шара перейдет частью в потенциальную энергию деформаций плоскости (т.е. футеровки), частью в энергию упругих волн, в энергию разрушения футеровки, в энергию трения и т.д. Время удара обычно рассматривается как процесс, состоящий из двух актов: первый акт от момента касания тел до момента их наибольшего сжатия t_2 ; второй – от момента наибольшего сжатия t_2 до момента последнего касания t_1 .

По закону сохранения количества движения общая скорость в момент наибольшего сжатия будет

$$V = \frac{m_1 V_1 + m_2 V_2}{m_1 + m_2}.$$

А.Н. Динник для удара шара о плоскость приводит следующие выражения:

- для сближения двух тел

$$\alpha = \frac{1}{4} R \sqrt[5]{\frac{100\pi^2 \rho_1^2 16(1-\nu^2)(E_1 + E_2)^2}{E_1^2 E_2^2}} V^{3/5}; \quad (1)$$

- для нормального напряжения

$$\sigma_z = 4 \sqrt[5]{\frac{10 \rho_1 E_1^4 E_2^4}{\pi^4 4^4 (1-\nu^2)^2 (E_1 + E_2)^4}} V^{3/5}; \quad (2)$$

- для касательного напряжения

$$\tau = 0,7358 R \sqrt[5]{\frac{100 \pi^2 \rho^2 16 (1-\nu^2)^2 (E_1 + E_2)^2}{E_1^2 E_2^2 \nu}}, \quad (3)$$

где ρ_1 – плотность шара;

ρ_2 – плотность футеровки;

R – радиус шара;

V – скорость удара;

α – сближение тел;

σ_z – нормальное напряжение;

τ – касательное напряжение;

E_1 и E_2 – модули Юнга шара и футеровки соответственно;

ν – коэффициент Пуассона.

Эти формулы А.Н. Динник использовал для вычисления α , σ_z и τ при ударных нагрузках различных материалов: в основном металлических, стекла и др. Следует подчеркнуть, что с некоторыми допущениями они дают хорошую сходимость с экспериментом и для системы «шар – резиновая плита». Именно их использовал автор для определения величины сближения тел и нормального напряжения.

А.Н. Динник провел обширные экспериментальные исследования различных материалов в условиях ударных напряжений, в том числе и таких, которые вызывают разрушение плоскости. При этом он отметил весьма важный факт, позже подтвержденный многими исследователями: материалы (в основном металлы) локально могут выдерживать большие напряжения без видимых следов разрушения. Причины такого поведения авторы видят в следующем:

- согласно III теории прочности локальные разрушения материала начнутся тогда, когда касательные напряжения достигнут некоторого максимального значения;
- время удара обычно незначительно и напряжения благодаря релаксационным свойствам материала не успевают проявиться в полной мере;
- в зоне контакта материал находится в условиях объемного сжатия.

По теории А.Н. Динника главные напряжения в центре удара

$$\bar{X}_x = \bar{Y}_y = \bar{Z}_z \frac{1+2\nu}{2};$$

для сжатия металла при $\nu=0,3$ имеем $\bar{X}_x = \bar{Y}_y = 0,8\bar{Z}_z$;

для резины при $\nu=0,5$ имеем $\bar{X}_x = \bar{Y}_y = \bar{Z}_z$.

При таких условиях материал может выдержать намного больше напряжения, чем при монофазном сжатии. Следует также отметить, что резина благодаря несжимаемости ($\nu=0,5$) при ударных нагрузках находится в более благоприятных

ятных условиях, чем металлы. Наибольшие касательные напряжения в центре поверхности удара, от которых соответственно и зависит разрушение футеровки, будут равны

$$\bar{T}_{xz} = \bar{T}_{yz} = \frac{1}{2}(\bar{Z}_z - \bar{X}_x) = \frac{1}{10}Z_z,$$

а при монофазном сжатии наибольшее касательное напряжение на площадке, составляющей угол 45° с напряжением \bar{Z}_z , будет

$$\bar{T} = \frac{1}{2}\bar{Z}_z$$

В этом, по-видимому, и заключается одна из причин более высокой стойкости резины к ударным нагрузкам, чем металла.

2.1.1 Сравнение с экспериментальными результатами

В РФ, в отличие от металлической, преобладает упруго-вязкий длинный удар, в зоне контакта существенно нелинейный.

Глубина лунки при ударе шара диаметром 60 мм со скоростью $V = 12$ м/с о РФ, полученная при расчете по формуле (1), равна 1,73 см, что отличается от глубины, полученной экспериментально, на 3,9 % (экспериментальное значение равно 1,8 см).

В зоне контакта шара с РФ Чижик [1, 4] получил величины нормальных напряжений $\sigma_z = 18 \div 25$ МПа. Расчет по формуле (2) дает $\sigma_z = 20,8$ МПа.

2.2 Вдавливание шара в плоскость

А.Н. Динник для вдавливания шара в плоскость давлением p получил следующие формулы [2]:

- для сближения шара и плоскости

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{9p^2(\theta_1 + \theta_2)^2}{256R}}; \quad (4)$$

- для нормального напряжения

$$\sigma_z = \frac{3}{\pi} \sqrt[3]{\frac{4p}{9R^2(\theta_1 + \theta_2)^2}}; \quad (5)$$

- для радиуса площадки контакта

$$a = \sqrt[3]{\frac{3pR(\theta_1 + \theta_2)}{16}}; \quad (6)$$

где $\theta_i = \frac{4(1-\nu_i^2)}{E_i}$ ($i = 1, 2$).

Используя эти формулы, для металлического шара ($\nu_1 = 0,3$, $E_1 = 2 \cdot 10^5$ МПа) радиусом $R = 30$ мм, вдавливаемого в резиновую футеровку ($\nu_2 = 0,499$, $E_2 = 10$ МПа) давлением $p = 0,25$ МПа, получаем $\sigma_z = 21,2$ МПа.

3 Алгоритм решения контактной задачи МКЭ

Предполагается, что контактируют два тела, одно из них упругое, второе абсолютно жесткое, которое не деформируется. Алгоритм решения контактной задачи сводится к последовательному выполнению следующих шагов:

1. На первом шаге нагружения по заданным координатам конструкции $\{x_i\}$, вычисленным вектору перемещений $\{u_i\}$ и компоненте тензора напряжения $\{\sigma_{ij}\}$ вычисляется матрица жесткости $[K^*]$.

2. Текущее значение параметров нагрузки определяется следующим образом

$$P_n = P_{n-1} + \Delta P_n.$$

3. Из системы линейных алгебраических уравнений

$$\{u_{n-1}\} = [K^*] \{P_{n-1}\}$$

находится вектор перемещений. Начальное приближение искомого решения $\{\Delta u_{n(1)}\}$ находится с помощью экстраполяционной формулы

$$\{\Delta u_{n(1)}\} = \{\Delta u_{n-1}\} \frac{\Delta P_n}{\Delta P_{n-1}}.$$

4. Задаются краевые условия непроникания контактирующих тел. К узловым точкам, которые пересекают границу контакта после нагружения, прикладывается вектор дополнительной нагрузки, который определяется новым вектором перемещений:

$$\{\Delta u_{n(2)}\} = \{\Delta u_{n(1)}\} - \{\Delta v_{n(1)}\},$$

где $\{\Delta u_{n(1)}\}$ – вектор перемещения точек без учета граничных условий;

$\{\Delta u_{n(2)}\}$ – новый вектор перемещений;

$\{\Delta v_{n(1)}\}$ – вектор перемещений от дополнительной загрузки.

Далее вычисляется вектор дополнительной нагрузки P_n^* как функция от $\{\Delta v_{n(1)}\}$ и суммируется с вектором нагрузки.

5. Приближенное значение перемещений $\{\Delta u_{n(2)}\}$ подставляется в линейные уравнения, определяется вектор узловых невязок $\{R_{n(2)}\}$, численной характеристикой которого является сумма квадратов компонент узловых невязок $\{R^*\}$. Данная величина позволяет судить о сходимости получаемых решений.

6. Оценка вектора узловых невязок $\{R_{n(2)}\}$ определяется следующим образом: принимается, то значение вектора перемещений $\{\Delta u_{n(2)}\}$, при котором выполняется условие:

$$(R_{(2)})^2 < (P_n)^2 \varepsilon, \text{ где } 10^{-4} \leq \varepsilon \leq 10^{-2}. \quad (7)$$

7. При выполнении условия (7) вектор $\{R_{n(2)}\}$ принимается за дополнительную нагрузку и подставляется в правую часть системы линейных уравнений.

8. Решается система линейных уравнений, находится приращение нового вектора перемещений $\{\Delta w_{n(1)}\}$ и суммируется с вектором $\{\Delta u_{n(2)}\}$:

$$\{\Delta u_{n(3)}\} = \{\Delta u_{n(2)}\} + \{\Delta w_{n(1)}\}.$$

9. Для нового вектора перемещений $\{\Delta u_{n(3)}\}$ проверяется условие непроникания. Если точки упругого тела снова проникли в жесткое тело, то для вектора $\{\Delta u_{n(3)}\}$ выполняются пункты 4-8.

10. Итерационный процесс заканчивается при выполнении условия непроникания и условия (7) для текущих значений величины вектора невязок узловых нагрузок.

11. Пересчитываются и значения тензоров деформации и напряжения:

$$\{\varepsilon_{n+1}^{ij}\} = \{\varepsilon_n^{ij}\} + \{\Delta \varepsilon_n^{ij}\};$$

$$\{\sigma_{n+1}^{ij}\} = \{\sigma_n^{ij}\} + \{\Delta \sigma_n^{ij}\}.$$

Результаты расчета по МКЭ. Изложенный выше алгоритм был применен для решения контактной задачи для резиновой футеровки, в которую вдавливается металлический шар. Расчетная схема приведена на рис. 1. Были заданы следующие размеры контактирующих тел: $l_1 = 486$ мм, $l_2 = 170$ мм, $h_1 = 50$ мм, $h_2 = 150$ мм, $L = 375$ мм, $d = 60$ мм. Футеровка выполнена из резины, для которой $E = 10$ МПа, $\nu = 0,499$. Давление шара на футеровку равно $q = 0,25$ МПа.

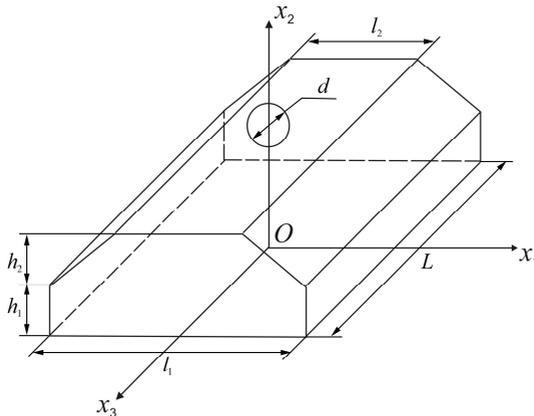


Рис. 1 – Расчетная схема

Распределение нормальных напряжений σ_{22} показано на рис. 2. Как видно, максимальное по величине напряжение будет в центре поверхности контакта.

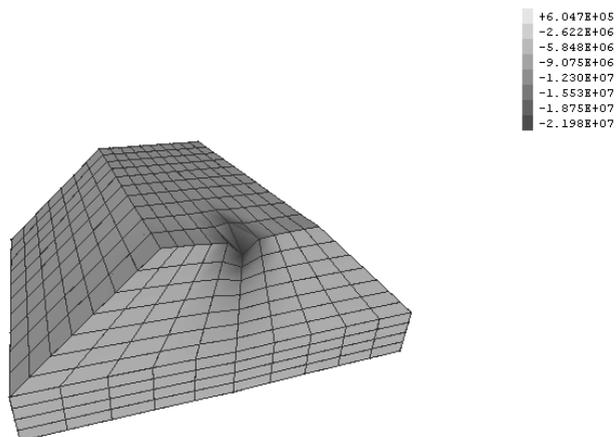


Рис. 2 – Распределение напряжений σ_{22} в футеровке

Выводы.

1. Рассмотрены две модели взаимодействия шара и резиновой футеровки: модель прямого центрального удара Герца-Динника и модель вдавливания Динника.

2. При ударе шара о футеровку получено нормальное напряжение в центре поверхности контакта $\sigma_z = 20,8$ МПа.

3. При вдавливании и расчете по модели Динника нормальное напряжение равно $\sigma_z = 21,2$ МПа.

4. При расчете при помощи МКЭ получено следующее значение нормального напряжения: $\sigma_z = 21,98$ МПа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чижик Е.Ф., Маркелов А.Е., Дырда В.И. Защитные футеровки барабанных рудоизмельчительных мельниц. – Днепропетровск, 2002. – 204 с.
2. Динник А.Н. Избранные труды. – К.: Изд-во АН УССР, 1952. – Т. 1. – 137 с.
3. Кильчевский Н.А. Динамическое контактное сжатие твердых тел. Удар. – К.: Наук. думка, 1976. – 320 с.
4. Чижик Е.Ф. Барабанные рудоизмельчительные мельницы с резиновой футеровкой. – Днепропетровск: Изд-во «Новая идеология», 2005. – 361 с.
5. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Наука, 1967. – 480 с.
6. Александров Е.В., Соколинский В.Б. Прикладная теория и расчеты ударных систем. – М.: Наука, 1969. – 200 с.