

щини. Поєднання розроблених підходів з ефективними ітераційними алгоритмами розв'язання систем лінійних рівнянь дозволяє розв'язувати подібні задачі з обчислювальними витратами на порядок меншими в порівнянні із відомими сучасними програмними комплексами.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гецов Л.Б. Материалы и прочность деталей газовых турбин. – М.: Недра, 1996. – 591 с.
2. Алгоритм моделювання розвитку тріщини в просторових тілах із застосуванням напіваналітичного метода скінченних елементів / Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С., Шкриль О.О. // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. – К.: КНУБА, 2004. – Вип. 75. – С. 13-26.
3. Визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень в призматичних тілах з тріщинами / Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С., Шкриль О.О. // Опір матеріалів і теорія споруд. – К.: КНУБА, 2003. – Вип. 73. – С. 73-84.
4. Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл: Монографія / В.А. Баженов, О.І. Гуляр, С.О. Пискунов, О.С. Сахаров. – К.: КНУБА, 2005. – 298 с.
5. Парис П., Эрдоган Ф. Критический анализ законов распространения трещины // Техн. механика. Сер. Д. – 1963. – № 4. – С. 60-68.

УДК 539.3, 539.375

Гуляр А.И., Пискунов С.О., Сахаров А.С.

ПОСТРОЕНИЕ ДИСКРЕТНОГО АНАЛОГА ИНВАРИАНТНОГО КОНТУРНОГО ИНТЕГРАЛА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЫСВОБОЖДАЕМОЙ ЭНЕРГИИ РАЗВИТИЯ ТРЕЩИН

Розглянута проблема обчислення величин енергетичних інтегралів, що використовуються при розв'язанні задач механіки руйнування на основі методу скінченних елементів (МСЕ).

DEVELOPMENT OF THE DISCRETE ANALOGUE OF INVARIANT CONTOUR INTEGRAL FOR CRACK PROPAGATION ENERGY RELEASE RATE

The problem of energy integrals values calculation used for fracture mechanics problem solution on the basis of finite element method (FEM) is considered.

Величина энергии, высвобождаемой при образовании новых поверхностей трещины, является одной из важнейших критериальных характеристик механики разрушения и используется при решении как линейных, так и нелинейных задач. Вычисление величины высвобождаемой энергии основывается на использовании инвариантных энергетических интегралов. Сложность решения краевой задачи об определении напряженно-деформированного состояния тела с трещиной и последующего вычисления значений энергетических интегралов требует привлечения численных методов. Наиболее широкое распространение для решения этой задачи получил метод конечных элементов (МКЭ).

Проблема определения величин энергетических интегралов на основе МКЭ рассмотрена в значительном количестве публикаций [1-14] и др. При этом, имеются данные о нарушении фундаментальных свойств их инвариантности [3, 7], подтвержденные также результатами, приведенными в работе [1]. Этот факт объясняется, в частности, тем, что необходимым условием обеспечения инвариантности является выполнение условий равновесия в пределах всей области по

которой выполняется интегрирование. В случае решения задачи на основе МКЭ уравнения равновесия удовлетворяются только в узлах дискретной модели. В связи с этим, актуальной является задача о построении дискретных конечно-элементных аналогов энергетических интегралов, использование которых позволяло бы получать достоверные результаты.

Наибольшее распространение для решения указанной задачи получил метод виртуального роста трещины, предложенный в работах [12, 14]. Дальнейшее развитие этого метода выполнено в [3, 10, 12] и других работах, обзор которых содержится в [2, 10]. В указанных работах рассмотрено вычисление величины высвобождаемой энергии одной из точек фронта трещины. В работе [11] для случая криволинейного фронта трещины проводится определение усредненной вдоль фронта величины высвобождаемой энергии, а для вычисления распределения высвобождаемой энергии вдоль фронта предполагается поочередно рассматривать возможные приращения длины трещины в окрестности точек фронта. Таким образом, вычисление распределения высвобождаемой энергии вдоль фронта трещины требует существенных дополнительных вычислительных затрат. Кроме того, описанный в указанных работах подход не позволяет получать инвариантных по отношению к области интегрирования значений величины высвобождаемой энергии.

Целью данной работы является построение дискретного аналога инвариантного контурного интеграла для вычисления высвобождаемой энергии развития трещин, позволяющего с высокой эффективностью получать достоверные распределения величины высвобождения энергии вдоль фронта трещины.

Рассмотрим упругое тело объемом V , ограниченное поверхностью S . В теле имеется трещина со свободной поверхностью S^C (рис. 1). Внешние силы интенсивностью \vec{p} приложены на поверхности S и удовлетворяют граничному условию:

$$\vec{n} \cdot \hat{\sigma}|_S = \vec{p}, \quad (1)$$

где \vec{n} – вектор единичной нормали к поверхности S ;
 $\hat{\sigma}$ – тензор напряжений.

В качестве параметра разрушения рассмотрим величину G – отношение энергии dE , высвобожденной при продвижении трещины, к величине образовавшейся поверхности dS^C :

$$G = \frac{dA}{dS^C}. \quad (2)$$

Приращение энергии dE определяется из общих соотношений статики сплошной среды:

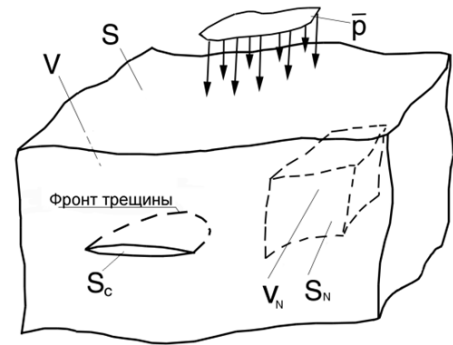


Рис. 1 – Пространственное тело с трещиной

$$dE = \int_S (\vec{p} \cdot d\vec{u}) dS - d \int_V W dV = \int_S (\vec{n} \cdot \hat{\sigma} \cdot d\vec{u}) dS - d \int_V W dV, \quad (3)$$

где $W = \frac{1}{2} \hat{\sigma} \cdot \hat{\varepsilon}$ – плотность упругой энергии деформации;

$\hat{\varepsilon}$ – тензор деформаций;

$d\vec{u}$ – приращение вектора перемещений.

Для произвольной части тела объемом V_N и поверхностью S_N (рис. 1), где трещина отсутствует, справедливо энергетическое равенство [7]:

$$dE = \int_{S_N} (\vec{n} \cdot \hat{\sigma} \cdot d\vec{u}) dS - d \int_{V_N} W dV = 0. \quad (4)$$

С использованием этого равенства содержащиеся в (3) интегралы могут быть разделены на две группы слагаемых, одна из которых соответствует части тела, содержащей трещину, другая – остальной части тела без трещин. Поскольку вторая группа слагаемых обращается в нуль, то из этого вытекает известное свойство инвариантности соотношений (2) и (3) – значения dE и G не зависят от того будет ли рассматриваться все тело или часть его объема V^* (ограниченного поверхностью S^* и поверхностью трещины S_C), в котором содержится фронт трещины:

$$G dS_C = dE = \int_{S^*} (\hat{\sigma} \cdot d\vec{u}) \cdot \vec{n} dS - d \int_{V^*} W dV, \quad (5)$$

Пользуясь теоремой Клапейрона, можно представить объемный интеграл в (5) через поверхностный

$$d \int_{V^*} W dV = \frac{1}{2} \int_{S^*} d(\hat{\sigma} \cdot \vec{u}) \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{2} \int_{S^*} (\hat{\sigma} \cdot d\vec{u} + \vec{u} \cdot d\hat{\sigma}) \cdot \vec{n} dS,$$

и записать формулу для G в виде инвариантного поверхностного интеграла

$$G dS_C = dE = \frac{1}{2} \int_{S^*} (\hat{\sigma} \cdot d\vec{u} - \vec{u} \cdot d\hat{\sigma}) \cdot \vec{n} dS. \quad (6)$$

Однако, непосредственное применение в численных расчетах данной формулы или подобных интегральных выражений приводит к потере фундаментального свойства интегралов – независимости их от выбора поверхности, окружающей трещину, что негативно влияет на достоверность вычисляемых значений параметров механики разрушения [1]. В тоже время для численных методов, построенных на энергетических принципах, например, для метода конечных элементов (МКЭ), можно построить аналоги соответствующих интегралов с удовлетворением свойства инвариантности. В работе [1] такой подход реализован на основе МКЭ для вычисления J -интеграла Черепанова-Райса. В данной работе предлагается методика построения дискретных МКЭ аналогов инвариантных интегралов для вычисления параметра разрушения высвобождаемой энергии G в трехмерных телах.

При рассмотрении конечно-элементной модели (КЭМ) тела с трещинами будем соблюдать условие, что поверхности трещин S_C и ограничивающая тело поверхность S проходят по граням КЭ, а линии фронтов трещин в начальном и

последующих состояниях в процессе продвижения трещин проходят по ребрам КЭ.

Рассмотрим КЭМ всего тела объемом V или его части объемом V^* с трещиной в двух равновесных состояниях. Первое состояние соответствует начальному положению фронта трещины и второе – новому положению, полученному при продвижении трещины на один шаг сетки с возникновением новой поверхности площадью ΔS_c (рис. 2).

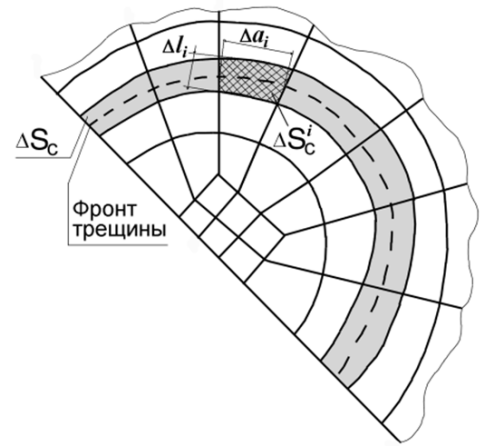


Рис. 2 – Приращение трещины в дискретной модели

Введем следующие обозначения: $\{\bar{U}^I\}$, $\{\bar{U}^{II}\}$, $\{\bar{U}_K^I\}$, $\{\bar{U}_K^{II}\}$ – векторы узловых перемещений КЭМ всего тела и его K -той части, определенных для первого и второго состояний; $\{\tilde{U}_S^I\}$, $\{\tilde{U}_S^{II}\}$, $\{\tilde{U}_{S_K}^I\}$, $\{\tilde{U}_{S_K}^{II}\}$ – векторы перемещений узлов, расположенных на поверхностях S или S_K ограничивающих соответствующие объемы без учета поверхностей трещины для обоих состояний; $\{P_S\}$ – вектор поверхностных узловых нагрузок, эквивалентных внешним нагрузкам \bar{p} , расположенным на поверхности S ; $\{R_{S_K}^I\}$, $\{R_{S_K}^{II}\}$ – векторы узловых реакций, действующих на выделенную часть V_K по поверхности S_K со стороны остальной части тела, которые эквивалентны распределенным силам $\bar{r} = \bar{n} \cdot \hat{\sigma}|_{S_K}$ (\bar{n} – внешняя нормаль к S_K); $[\bar{K}^I]$, $[\bar{K}^{II}]$, $[\bar{K}_K^I]$, $[\bar{K}_K^{II}]$ – матрицы жесткости КЭМ всего тела и его V_K части для двух состояний.

Будем считать, что для обоих состояний КЭМ удовлетворяются уравнения равновесия:

$$[\bar{K}_V^I] \{\bar{U}^I\} = \{\bar{Q}^I\}, \quad (7)$$

$$[\bar{K}_V^{II}] \{\bar{U}^{II}\} = \{\bar{Q}^{II}\}, \quad (8)$$

где $\{\bar{Q}^I\}$, $\{\bar{Q}^{II}\}$ – вектора нагрузок, компоненты которых для внутренних узлов и узлов на поверхности трещин S_c являются нулевыми, а на поверхности S равны соответствующим компонентам вектора $\{P_S\}$.

Дискретный аналог формул (2), (3) может быть представлен в виде отношения высвободившейся энергии ΔE к приращению площади поверхности трещины ΔS_c

$$G = \Delta E / \Delta S_c, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \Delta E &= \{P_S\}^T \left(\{\tilde{U}_S^{\text{II}}\} - \{\tilde{U}_S^{\text{I}}\} \right) - \Delta W = \{P_S\}^T \left(\{\tilde{U}_S^{\text{II}}\} - \{\tilde{U}_S^{\text{I}}\} \right) - (W_V^{\text{II}} - W_V^{\text{I}}) = \\ &= \{P_S\}^T \left(\{\tilde{U}_S^{\text{II}}\} - \{\tilde{U}_S^{\text{I}}\} \right) - \frac{1}{2} \left(\{\bar{U}^{\text{II}}\}^T [\bar{K}^{\text{II}}] \{\bar{U}^{\text{II}}\} - \{\bar{U}^{\text{I}}\}^T [\bar{K}^{\text{I}}] \{\bar{U}^{\text{I}}\} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

где первое слагаемое правой части соответствует поверхностному интегралу в (3), второе слагаемое – приращению упругой энергии дискретной модели при переходе из одного состояния трещины в другое.

Покажем, что для любой части КЭМ тела с объемом V_N , которая не содержит трещину, справедливо энергетическое равенство, аналогичное (4)

$$\begin{aligned} \Delta E_N &= \frac{1}{2} \left(\{R_{S_N}^{\text{I}}\} + \{R_{S_N}^{\text{II}}\} \right)^T \left(\{\tilde{U}_{S_N}^{\text{II}}\} - \{\tilde{U}_{S_N}^{\text{I}}\} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\{\bar{U}_N^{\text{II}}\}^T [\bar{K}_N^{\text{II}}] \{\bar{U}_N^{\text{II}}\} - \{\bar{U}_N^{\text{I}}\}^T [\bar{K}_N^{\text{I}}] \{\bar{U}_N^{\text{I}}\} \right) = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где подразумевается, что при совпадении части поверхности S_N с поверхностью S соответствующие компоненты векторов реакций $\{R_{S_N}^{\text{I}}\}$ и $\{R_{S_N}^{\text{II}}\}$ равны компонентам вектора поверхностной нагрузки $\{P_S\}$.

Произведение матриц жесткости на вектор перемещений первого и второго состояния представляют собой вектора реакций, которые при отсутствии объемной нагрузки являются нулевыми во внутренних узлах и равны поверхностным реакциям $\{R_{S_N}^{\text{I}}\}$, $\{R_{S_N}^{\text{II}}\}$ на S_N :

$$\{\bar{U}_N^{\text{II}}\}^T [\bar{K}_N^{\text{II}}] \{\bar{U}_N^{\text{II}}\} - \{\bar{U}_N^{\text{I}}\}^T [\bar{K}_N^{\text{I}}] \{\bar{U}_N^{\text{I}}\} = \{\tilde{U}_{S_N}^{\text{II}}\}^T \{R_{S_N}^{\text{II}}\} - \{\tilde{U}_{S_N}^{\text{I}}\}^T \{R_{S_N}^{\text{I}}\}. \quad (12)$$

Подставляя (12) в (11) после приведения подобных членов имеем:

$$\Delta E_N = \frac{1}{2} \left(\{R_{S_N}^{\text{I}}\}^T \{\tilde{U}_{S_N}^{\text{II}}\} - \{R_{S_N}^{\text{II}}\}^T \{\tilde{U}_{S_N}^{\text{I}}\} \right). \quad (13)$$

Тело в объеме V_N не содержит трещин и его свойства не зависят от состояния трещины. В этом случае можно воспользоваться теоремой взаимности работ, следствием которой является соотношение

$$\{R_{S_N}^{\text{I}}\}^T \{\tilde{U}_{S_N}^{\text{II}}\} = \{R_{S_N}^{\text{II}}\}^T \{\tilde{U}_{S_N}^{\text{I}}\}, \quad (14)$$

доказывающее равенство нулю значения ΔE_N в (13)

$$\Delta E_N = \frac{1}{2} \left(\{R_{S_N}^{\text{I}}\}^T \{\tilde{U}_{S_N}^{\text{II}}\} - \{R_{S_N}^{\text{II}}\}^T \{\tilde{U}_{S_N}^{\text{I}}\} \right) = 0,$$

и тем самым справедливость соотношения (11).

Из (10) можно вычесть выражения типа (11) для приращений энергии в объемах тела без трещин. Обозначая V^* любой объем КЭМ тела с поверхностью S^* (не включая поверхность трещины S_C), в котором содержатся все КЭ, примыкающие к фронту трещины в обоих ее состояниях на основе (9)-(11) имеем:

$$\begin{aligned}
 G &= \frac{1}{\Delta S_C} \left(\frac{1}{2} \left(\{R_{S^*}^I\} + \{R_{S^*}^{II}\} \right)^T \left(\{\tilde{U}_{S^*}^{II}\} - \{\tilde{U}_{S^*}^I\} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{1}{2} \{\bar{U}_{V^*}^{II}\}^T [\bar{K}_{V^*}^{II}] \{\bar{U}_{V^*}^{II}\} - \frac{1}{2} \{\bar{U}_{V^*}^I\}^T [\bar{K}_{V^*}^I] \{\bar{U}_{V^*}^I\} \right) \right) = \\
 &= \frac{1}{\Delta S_C} \left(\frac{1}{2} \left(\{R_{S^*}^I\} + \{R_{S^*}^{II}\} \right)^T \left(\{\tilde{U}_{S^*}^{II}\} - \{\tilde{U}_{S^*}^I\} \right) - (W_{V^*}^{II} - W_{V^*}^I) \right), \quad (15)
 \end{aligned}$$

Учитывая, что при ненагруженной поверхности трещины и при отсутствии объемных сил, для объема V^* справедливо (12), представим (15) в виде

$$G = \frac{1}{4\Delta S_C} \left(\left(\{R_{S^*}^{II}\} + \{R_{S^*}^I\} \right)^T \left(\{\tilde{U}_{S^*}^{II}\} - \{\tilde{U}_{S^*}^I\} \right) - \left(\{\tilde{U}_{S^*}^{II}\} + \{\tilde{U}_{S^*}^I\} \right)^T \left(\{R_{S^*}^{II}\} - \{R_{S^*}^I\} \right) \right), \quad (16)$$

что является дискретным аналогом (6). После приведения в (16) подобных членов получаем инвариантную формулу для G через работу реакций на поверхности S^* :

$$G = \frac{1}{2\Delta S_C} \left(\{R_{S^*}^I\}^T \{\tilde{U}_{S^*}^{II}\} - \{R_{S^*}^{II}\}^T \{\tilde{U}_{S^*}^I\} \right). \quad (17)$$

Учитывая, что в дискретной конечно элементной модели нет особенностей, минимальный объем V_{\min}^* для вычисления G можно составить только из тех КЭ, грани которых совпадают с поверхностью ΔS_C .

С помощью выражений (15) – (17) определяется средняя интенсивность высвобождения упругой энергии при продвижении трещины. Во многих практических задачах важно знать также закон распределения интенсивности высвобождения энергии вдоль фронта трещины. Обычно в этом случае привлекаются прямые методы, позволяющие рассчитать локально напряжено-деформированное состояние в окрестности трещины и затем вычислить величину высвобождаемой энергии при стагивании трещины. Аналитические исследования, выполненные в этом направлении, показали, что у фронта трещины в упругом теле напряжено-деформированное состояние является достаточно близким к плоскому (трещины первого и второго рода) или антиплоскому (трещины третьего рода) деформированному состоянию [5, 9]. Отсюда вытекает возможность определения параметра G на основе инвариантных интегралов независимо в каждой точке фронта трещины.

При численной реализации такого подхода на базе полученных дискретных аналогов инвариантных интегралов для вычисления G поверхность ΔS_C делится вдоль фронта трещины на m частей $\Delta S_C = \sum_i^m \Delta S_c^i$, каждая из которых ΔS_c^i состоит из примыкающих к трещине КЭ (рис. 2, рис. 3). По такому же принципу делится весь объем V_{\min}^* на локальные объемы V_{\min}^i .

Тогда формулы (15), (17) можно преобразовать для вычисления значений G_i в отдельных зонах фронта трещины с сохранением свойства инвариантности относительно рассматриваемых объемов тела

$$G_i = \frac{1}{\Delta S_c^i} \left(\frac{1}{2} \left(\{R_{S_i^*}^I\} + \{R_{S_i^*}^{II}\} \right)^T \left(\{\tilde{U}_{S_i^*}^{II}\} - \{\tilde{U}_{S_i^*}^I\} \right) - \right. \tag{18}$$

$$\left. G_i = \frac{1}{2\Delta S_c^i} \left(\{R_{S_i^*}^I\}^T \{\tilde{U}_{S_i^*}^{II}\} - \{R_{S_i^*}^{II}\}^T \{\tilde{U}_{S_i^*}^I\} \right), \tag{19}$$

где S_i^* внешняя (без учета поверхности трещины) поверхность объема V_i^* КЭМ, который включает объем v_{\min}^i и любой примыкающий к нему объем тела без трещины.

При этом значение G_i следует относить к центрам тяжести площадей ΔS_c^i , а линию, соединяющую эти центры, принимать за фактический фронт трещины, для которого определены G_i . Такая трактовка позволяет определять разбивку ΔS_c на ΔS_c^i с точки зрения более точной аппроксимации фронта трещины.

Для оценки достоверности предложенного подхода и его конечноэлементной реализации рассмотрим тестовую задачу об определении величины энергии G , высвобождаемой при продвижении боковой трещины на величину ΔS в призматическом теле, нагруженном распределенной вдоль его грани нагрузкой $q = 4300 \text{ кг/см}^2$ (рис. 4). Поскольку расчетная схема симметрична относительно плоскости фронта трещины, при конечноэлементной дискретизации моделирование трещины осуществлялось с помощью граничных условий и рассматривалась только одна из поверхностей, соответ-

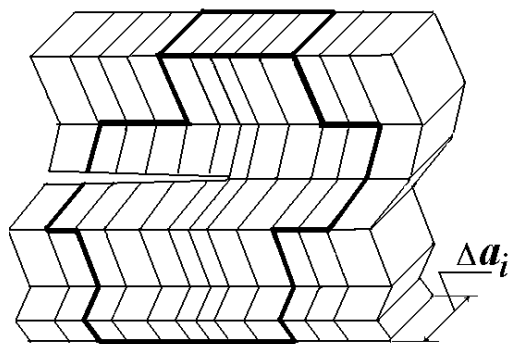


Рис. 3 – Область для вычисления приращения высвобождаемой энергии

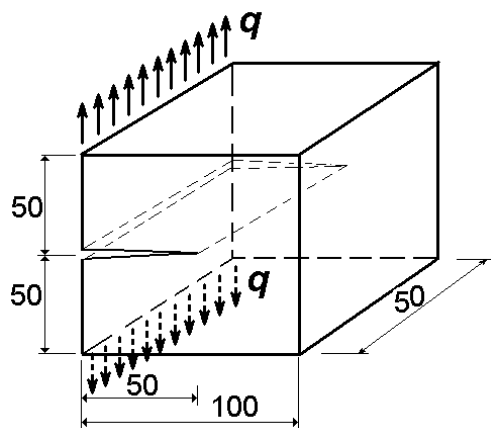


Рис. 4 – Призматическое тело с боковой трещиной

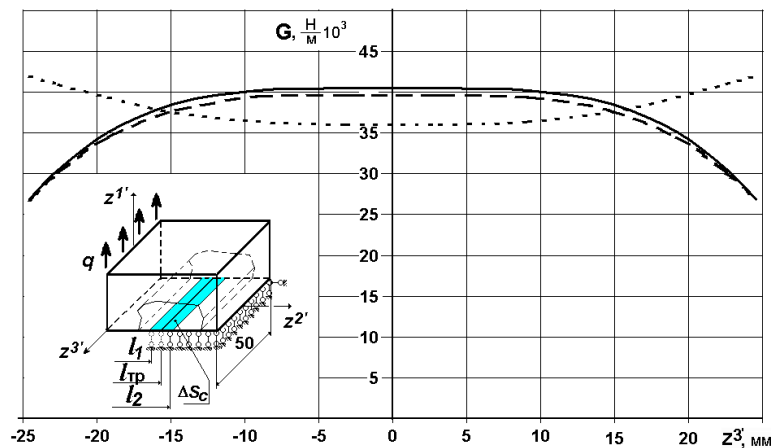


Рис. 5 – Распределение высвобождаемой энергии вдоль фронта трещины

ствующих приращению трещины (рис. 5).¹

Распределение высвобождаемой энергии, полученное с использованием выражения (17), совпадает с полученным на основе изложенной в [1] методики (соответственно сплошная и штриховая линии на рис. 5). В то же время, распределение высвобождаемой энергии, полученное как с использованием полуаналитического метода конечных элементов в [1], так и с использованием трехмерного МКЭ [6] на основе непосредственного вычисления выражений вида (6) (пунктирная линия, рис. 5) не обладает свойством инвариантности относительно контура интегрирования и является качественно неправильным.

Таким образом, полученное в данной работе выражение дискретного аналога энергетического интеграла позволяет получать достоверное распределение величины энергии, высвобождаемой при распространении трещины, вдоль ее фронта вне зависимости от формы и размеров выбранного для интегрирования объема и вида конечноэлементной сетки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Особливості обчислення J -інтеграла в дискретних моделях метода скінченних елементів / Баженів В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С., Шкриль О.О. // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2005. – № 76. – С. 86-97.
2. Вычислительные методы в механике разрушения: Пер. с англ./ Под ред. С.Атлури. – М.: Мир, 1990. – 392 с.
3. Никишков Г.П., Вайншток В.А. Метод виртуального роста трещины для определения коэффициентов интенсивности напряжений K_I и K_{II} // Проблемы прочности. – 1980. – №6. – С. 26-30.
4. Инвариантность J -интеграла для трещины в материале с негладкой диаграммой деформирования / Носиков А.И., Горохов М.Ю., Семенов А.С., Мельников Б.Е. // Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций и методы их решения: Тр. VI Межд. конф. – СПб: СПбГТУ, 2005. – С. 350–359.
5. Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения. – М.: Наука, 1974. – 416 с.
6. Інтегрована система моделювання технологічних процесів і розрахунку обладнання хімічної промисловості / Сахаров О.С., Щербіна Ю.В., Гондях О.В., Сівецький В.І. – Київ: Поліграфконсалтинг, 2006. – 156 с.
7. Седов Л.И. Введение в механику сплошной среды. – М.: Физматгиз, 1962. – 284 с.
8. Сиратори М., Миеси Т., Мацусита Х. Вычислительная механика разрушения : Пер. с японск. – М.: Мир, 1986. – 334 с.
9. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
10. Anderson T.L. Fracture Mechanics. Fundamentals and Applications. – CRC Press Boca Raton, Ann Arbor. – Boston, 2000. – 793 p.
11. deLorenzi H.G. On the energy release rate and the J -integral for 3-D crack configuration // Int. Journal of Fracture. – 1982. – Vol. 19. – P. 183-193.
12. Hellen T.K. On the method of virtual crack extensions // Int. Journal for Numeric Method Engineering. – 1975. – Vol. 9. – P. 187-207.
13. Moran B., Shih C.F. A general treatment of crack tip contour integrals // Int. Journal of Fracture. – 1987. – Vol.35. – P. 295-310.
14. Parks D.M. A stiffness derivative finite element technique for determination of crack tip stress intensity factors // Int. Journal of Fracture. – 1974. – Vol.10, N4. – P. 487-501.

¹ Результаты получены с участием Мицюка С.В.