

ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ТІЛ ОБЕРТАННЯ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ КРУГОВОГО СКІНЧЕНОГО ЕЛЕМЕНТА ЗМІННОЇ ПЛОЩІ ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ

На основаниі изменения величин компонент метрического тензора пропорционально изменению площади поперечного сечения получены соотношения матрицы жесткости и вектора узловых реакций полуаналитического неоднородного кругового конечного элемента переменной площади поперечного сечения. Проведены исследования достоверности полученных результатов.

DETERMINATION OF SOLID OF REVOLUTION STRESS-STRAIN STATE USING CIRCULAR FINITE ELEMENT OF VARIABLE CROSS SECTION AREA

The rigidity matrix and nodes reaction vector expressions of a semianalytical non-uniform circular finite element of variable cross section area on the basis of change of metric tensor component values proportionally to change of the cross section area were obtained. The research of results reliability was made.

Вступ. Просторові об'єкти, що являють собою тіла утворені рухом геометричної фігури вздовж кругової твірної – тіла обертання – становлять значну частину відповідальних об'єктів в різних галузях техніки. До них зокрема відносяться ротори та диски парових і газових турбін, фрагменти оболонок ядерних реакторів, ємності, резервуари та ін. (рис. 1)

Внаслідок конструктивних особливостей чи певних недосконалостей технологічних процесів виготовлення, площа поперечного перерізу цих об'єктів може змінюватись вздовж твірної, що призводить до відповідних змін напружено-деформованого стану.

На сьогоднішній день, ефективним засобом чисельного моделювання напружено-деформованого стану просторових тіл є напіваналітичний метод скінченних елементів (НМСЕ) [2]. Проте можливості його використання поширюються на призматичні тіла змінної та сталої площі поперечного перерізу і просторові тіла обертання із сталою площею поперечного перерізу. Визначення напружено-деформованого стану тіл обертання змінної площі поперечного перерізу потребує чисельного розв'язання просторової задачі і може призвести до значних обчислювальних витрат. В зв'язку з цим становить інтерес поширення області застосування НМСЕ на тіла обертання змінної площі поперечного перерізу, що надасть можливість значно скоротити обчислювальні витрати порівняно з МСЕ.

Метою даної роботи є розробка розв'язувальних співвідношень НМСЕ

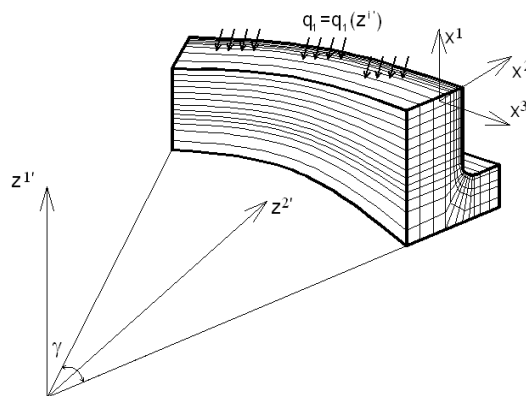


Рис. 1 – Тіло обертання змінної площі поперечного перерізу

для тіл обертання змінної площі поперечного перерізу, перевірка вірогідності отримуваних із застосуванням скінченного елемента (СЕ) змінної площі поперечного перерізу результатів моделювання напружено-деформованого стану при пружному деформуванні.

Вихідні співвідношення теорії пружності. Для дослідження процесів деформування просторових тіл обертання доцільно використовувати такі системи координат: базисну $z^{j'}$ (в розглядуваному випадку – циліндричну), яка є незмінною і призначена для завдання вихідної інформації про геометрію об'єкта, зовнішні впливи та граничні умови (осі z^1 та z^2 базисної системи координат розташовані в площині поперечного перетину тіла, а вісь z^3 орієнтована вздовж напрямної) і місцеву криволінійну систему координат x^i , природно пов'язану з геометрією досліджуваного об'єкта. При цьому вісь x^3 збігається за напрямком із віссю z^3 . Компоненти тензора перетворення

$$z^{i',j'} = \frac{\partial z^{i'}}{\partial x^j}, \quad z^{3,\alpha} = z^{3'} = 0$$

і компоненти метричного тензора

$$g_{\alpha\beta} = z^{3,\alpha} z^{3,\beta}, \quad g_{33} = (z^{3'})^2 (z^{2'})^2$$

є відомими в кожній точці тіла.

При пружному деформуванні повні напруження σ^{ij} визначаються через компоненти тензора пружних деформацій ε_{kl}^e відповідно до узагальненого закону Гука [3]

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}^e = [\mu (g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk}) + \lambda g^{ij} g^{kl}] \varepsilon_{kl}^e.$$

Матриця жорсткості та вектор вузлових реакцій неоднорідного кругового СЕ змінної площі поперечного перерізу. При застосуванні НМСЕ для моделювання напружено-деформованого стану розглядуваних об'єктів нанесення скінчено-елементної сітки проводиться в поперечному перерізі тіла (рис. 1). В напрямку твірної використовується один скінчений елемент (СЕ). Для тіл обертання в НМСЕ використовуються неоднорідний круговий СЕ, що являє собою криволінійну призму утворену переміщенням чотирикутника довільного обрису вздовж напрямної у вигляді дуги кола. В даному випадку для моделювання зміни площі поперечного перерізу тіла передбачається, що конфігурація поперечного перерізу СЕ зберігається незмінною (рис. 2), а площа може змінюватись за законом: $A(z^3) = A_0 f(z^3)$ де A_0 – площа поперечного перерізу при $z^3 = 0$, $f(z^3)$ – монотонна безперервна функція.

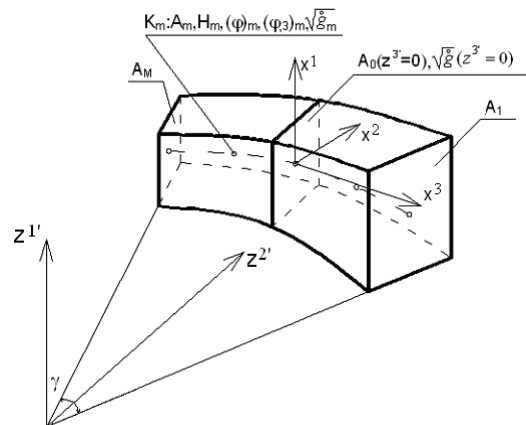


Рис. 2 – Неоднорідний скінчений елемент змінної площі поперечного перерізу

Вздовж осі СЕ, згідно до вимог правил інтегрування Гауса, розташовано М точок інтегрування. Розподіл переміщень в межах поперечного перерізу СЕ описується білінійним законом

$$u_{m'} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{m'(S_1 S_2)} \left(\frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right),$$

а в напрямку твірної для апроксимації переміщень використовується розкладення за системою координатних функцій $\varphi^{(l)}$, утворених на основі поліномів Лагранжа і Міхліна [2]

$$u_{m'} = \sum_{l=0}^L \bar{u}_{m'}^l \varphi^{(l)},$$

$$\text{де } \varphi^{(0)} = \frac{1}{2}(1-x^3), \quad \varphi^{(1)} = \frac{1}{2}(1+x^3);$$

$$\varphi^{(l)} = f^{(l)} p^{(l)} - f^{(l-2)} p^{(l-2)}, \quad f^{(l)} = \sqrt{(4l^2-1)^{-1}} - \text{поліноми Лагранжа.}$$

Згідно до моментної схеми скінченних елементів [1] величини напружень і деформацій подаються у вигляді розкладу в ряд Маклорена

$$\sigma^{\alpha\alpha} = \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha\alpha} + \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha\alpha} x^{(3-\alpha)}; \quad \sigma^{12} = \overset{\circ}{\sigma}^{12};$$

$$\sigma^{\alpha\alpha} = \overset{\circ}{\sigma}_{33}^{\alpha\alpha} + \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha\alpha} x^{(3-\alpha)}; \quad \sigma^{33} = \overset{\circ}{\sigma}^{33} + \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{33} x^{\alpha},$$

де $\overset{\circ}{\sigma}^{ij}$ та $\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{ij}$ – коефіцієнти розкладу напружень,

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}; \quad \varepsilon_{12} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{12};$$

$$\varepsilon_{\alpha 3} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}; \quad \varepsilon_{\alpha\alpha} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\beta} x^{\beta};$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} \Big|_{x^{\alpha}=0}; \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\beta} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x^{\beta}} \Big|_{x^{\beta}=0}.$$

Коефіцієнти розкладу прирощення напружень, пов'язані залежністю з коефіцієнтами розкладу прирощень деформацій закону Гука, векторна форма якого має вигляд [1, 2]

$$\{\overset{\circ}{\sigma}\} = [\overset{\circ}{D}] \{\overset{\circ}{\varepsilon}\},$$

$$\text{де } [\overset{\circ}{D}] = [\overset{\circ}{C}_{ijkl}], \quad [\overset{\circ}{D}_{,\alpha}] = [[C^{ij(3-\alpha)(3-\alpha)}] [C^{ij33}] [C^{ij(3-\alpha)}]].$$

Вирази матриці жорсткості і вектора вузлових реакцій отримані виходячи з варіаційного принципу Лагранжа

$$\sum_{n=1}^N (\delta W_n - \delta A_n) = 0.$$

З урахуванням вище наведених формул взаємозв'язку коефіцієнтів розкладу прирощень напружень і деформацій, та після виконання інтегрування в ме-

жах поперечного перерізу СЕ [2], вираз варіації енергії одного СЕ набуває вигляду

$$\delta W = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \delta \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\delta \{\varepsilon, \alpha\}^T [D, \alpha] \{\varepsilon, \alpha\} \right) \right\} \sqrt{g} dx^3.$$

Для урахування зміни площі поперечного перерізу обчислення величин метричного тензору здійснюється із урахуванням його зміни пропорційно до зміни площі поперечних перерізів

$$\sqrt{g} = \sqrt{g(z^{3'})} = \sqrt{g(z^{3'} = 0)} f(z^{3'}).$$

Кінцеві вирази вектора амплітудних вузлових реакцій $\{\overset{\circ}{R}_l\}$ і матриці жорсткості $[K]$ неоднорідного кругового СЕ змінної площі поперечного перерізу мають наступний вигляд

$$\{\overset{\circ}{R}_l\} = \left\{ \left[\overset{\circ}{B}_1 \right]^T \{s\}_l + \left[\overset{\circ}{B}_2 \right]^T \{s\}_{l3} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]^T \{s\}_{l\alpha} + \left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]^T \{s\}_{l\alpha 3} \right) \right\},$$

де $\{s\}_l = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \{\overset{\circ}{\sigma}\} \varphi^{(l)} \sqrt{g} dx^3 = \sum_{m=1}^M \{\overset{\circ}{\sigma}\}_m \varphi_m^{(l)} \left(\sqrt{g} \right)_m H_m;$

$$\{s\}_{l3} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \{\overset{\circ}{\sigma}\} \varphi_{,3}^{(l)} \sqrt{g} dx^3 = \sum_{m=1}^M \{\overset{\circ}{\sigma}\}_m \varphi_{,3}^{(l)} \left(\sqrt{g} \right)_m H_m;$$

$$\{s\}_{l\alpha} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \{\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}\} \varphi^{(l)} \sqrt{g} dx^3 = \sum_{m=1}^M \{\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}\}_m \varphi^{(l)} \left(\sqrt{g} \right)_m H_m;$$

$$\{s\}_{l\alpha 3} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \{\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}\} \varphi_{,3}^{(l)} \sqrt{g} dx^3 = \sum_{m=1}^M \{\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}\}_m \varphi_{,3}^{(l)} \left(\sqrt{g} \right)_m H_m;$$

$$[K]_{ln\tilde{N}\tilde{N}A} = \left\{ \left[\overset{\circ}{B}_1 \right]^T [T]_{30}^{ln} \left[\overset{\circ}{B}_1 \right] + \left[\overset{\circ}{B}_2 \right]^T [T]_{30}^{ln} \left[\overset{\circ}{B}_1 \right] + \left[\overset{\circ}{B}_1 \right]^T [T]_{03}^{ln} \left[\overset{\circ}{B}_2 \right] + \left[\overset{\circ}{B}_2 \right]^T [T]_{33}^{ln} \left[\overset{\circ}{B}_2 \right] + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]^T [T]_{00\alpha}^{ln} \left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right] + \left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]^T [T]_{30\alpha}^{ln} \left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right] + \left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]^T [T]_{03\alpha}^{ln} \left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right] + \left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]^T [T]_{33\alpha}^{ln} \left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right] \right) \right\};$$

$$[T]_{00}^{ln} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi^{(l)} \left[\overset{\circ}{D} \right] \varphi^{(n)} \sqrt{g} dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_m^{(l)} \left[\overset{\circ}{D} \right] \varphi_m^{(n)} \left(\sqrt{g} \right)_m H_m;$$

$$[T]_{30}^{ln} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_{,3}^{(l)} \left[\overset{\circ}{D} \right] \varphi^{(n)} \sqrt{g} dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_{,3m}^{(l)} \left[\overset{\circ}{D} \right] \varphi_m^{(n)} \left(\sqrt{g} \right)_m H_m;$$

$$[T]_{03}^{ln} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi^{(l)} [\overset{\circ}{D}] \varphi_{,3}^{(n)} \sqrt{g} dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_m^{(l)} [\overset{\circ}{D}] \varphi_{,3m}^{(n)} \left(\sqrt{g} \right)_m H_m ;$$

$$[T]_{33}^{ln} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_{,3}^{(l)} [\overset{\circ}{D}] \varphi_{,3}^{(n)} \sqrt{g} dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_{,3m}^{(l)} [\overset{\circ}{D}] \varphi_{,3m}^{(n)} \left(\sqrt{g} \right)_m H_m ;$$

$$[T]_{00\alpha}^{ln} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi^{(l)} [\overset{\circ}{D}_\alpha] \varphi^{(n)} \sqrt{g} dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_m^{(l)} [\overset{\circ}{D}_\alpha] \varphi_m^{(n)} \left(\sqrt{g} \right)_m H_m ;$$

$$[T]_{30\alpha}^{ln} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_{,3}^{(l)} [\overset{\circ}{D}_\alpha] \varphi^{(n)} \sqrt{g} dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_{,3m}^{(l)} [\overset{\circ}{D}_\alpha] \varphi_m^{(n)} \left(\sqrt{g} \right)_m H_m ;$$

$$[T]_{03\alpha}^{ln} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi^{(l)} [\overset{\circ}{D}_\alpha] \varphi_{,3}^{(n)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_m^{(l)} [\overset{\circ}{D}_\alpha] \varphi_{,3m}^{(n)} \left(\sqrt{g} \right)_m H_m ;$$

$$[T]_{33\alpha}^{ln} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_{,3}^{(l)} [\overset{\circ}{D}_\alpha] \varphi_{,3}^{(n)} \left(\sqrt{g} \right) dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_{,3m}^{(l)} [\overset{\circ}{D}_\alpha] \varphi_{,3m}^{(n)} \left(\sqrt{g} \right)_m H_m ;$$

$\{s\}$ – амплітудні напруження;

$\left(\sqrt{g} \right)_m = \sqrt{g} (z^3 = 0) f(z_m^3)$ – значення визначника метричного тензора, що відповідає розташованим вздовж твірної точкам інтегрування.

Для перевірки вірогідності моделювання напружено-деформованого стану кругових тіл змінної площі поперечного перерізу та визначення меж застосування розробленого скінченного елемента було проведено розв'язання тестового прикладу про деформування циліндра змінної площі поперечного перерізу під впливом внутрішнього тиску при різних співвідношеннях розмірів перерізів. Розглянуто зміну площ поперечного перерізу на 4, 10 та 20 відсотків на секторі циліндра кутом 90° (рис. 3).

Середній радіус циліндра $R_0 = 10$ мм, товщини стінок $t_0 = 2$ мм,

$$t_{1,2} = t_0 \pm kt_0 / (2 \times 100) ,$$

де k – коефіцієнт, що визначає відмінність товщини від t_0 (в відсотках).

Розв'язання задачі проведено МСЕ та НМСЕ із використанням дискретних моделей, наведених на рис. 3, а і рис. 3, б відповідно.

Отримані на основі МСЕ та НМСЕ результати наведені у вигляді графіків залежності колових напружень від зміни співвідношення товщин стінок циліндра t_1 і t_2 . Співставлення проведене в характерних точках, розташованих поблизу внутрішньої (точки 1, 2, 3, рис. 4, а) і зовнішньої (точки 4, 5, 6, рис. 4, б) поверхонь циліндра. Як видно, при значеннях в межах 10 % зберігається задовільна точність визначення колових напружень.

Таким чином, в даній роботі отримані і реалізовані розв'язувальні співвідношення для тіл обертання змінної вздовж колової координати площі поперечного перерізу. Отримані результати розв'язку тестової задачі засвідчили вірогід-

дність розробленого підходу для визначення напружено-еформованого стану тіл обертання змінної площі поперечного перерізу.

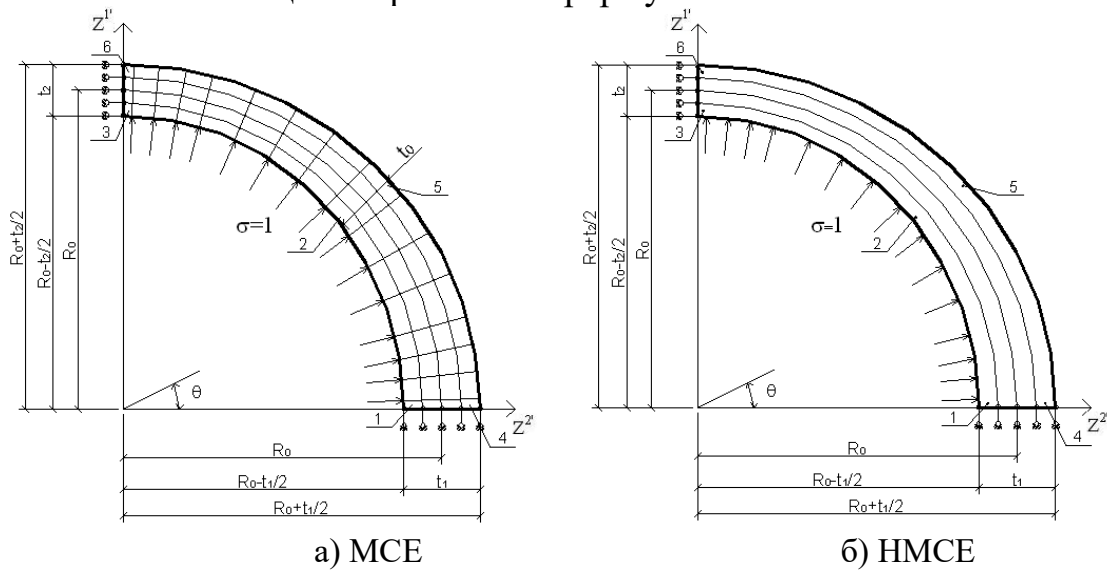


Рис. 3 – Дискретні моделі циліндра змінної площі поперечного перерізу

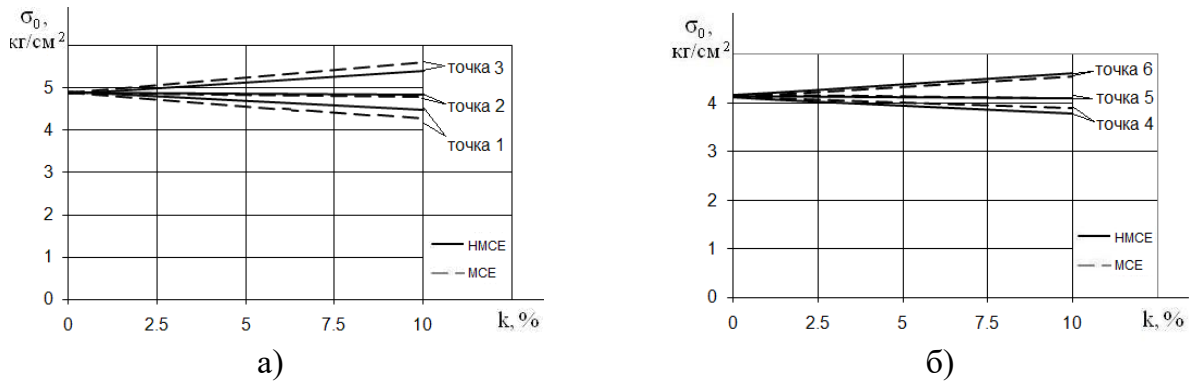


Рис. 4 – Залежність колового напруження від співвідношення товщин стінки циліндра

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел / Баженов В.А., Гуляев А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г. – К.: НИИ СМ, 1993. – 376 с.
2. Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл: Монографія / Баженов В.А., Гуляев О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С. – К.: КНУБА, 2005. – 298 с.
3. Блох В.И. Теория упругости. – Харьков: Изд-во ХГУ, 1964. – 483 с.
4. Пискунов С.О., Рутковский В.А., Шкриль О.О. Призматичний скінченний елемент змінної геометрії // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. – К.: КНУБА, 2005. – Вип. 76. – С. 73-82.
5. Сахаров А.С., Кислоокій В.Н., Киричевський В.В. Метод конечных элементов в механике твердых тел. – К.: Вища школа, 1982. – 480 с.