6. Raftopoulos D., Karapanos D., Theocaris T. Static and Dynamic Mechanical and Optical Behaviour of High Polymers // Journal of Physics D (Applied Physics). – 1976. – Vol. 9. – P, 869-877.

УДК 539.3

Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О.,
Андрієвський В.П.

МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРОСТОРОВИХ ЗАДАЧ ТЕРМОВ'ЯЗКОПРУЖНОПЛАСТИЧНОСТІ ПРИЗМАТИЧНИХ ТІЛ З УРАХУВАННЯМ ПОШКОДЖЕНОСТІ МАТЕРІАЛУ

Разработана методика решения пространственных задач термовязкоупругопластичности призматических тел с учётом повреждаемости материала на основании полуаналитического метода конечных элементов (ПМКЭ).

TECHNIQUE OF THERMOVISCOELASTOPLASTICITY SPATIAL PROBLEMS DECISION OF PRISMATIC BODIES REGARDING DAMAGEABILITY OF A MATERIAL

The technique of thermoviscoelastoplasticity spatial problems decision of prismatic bodies regarding damageability of a material on the basis of semianalytical finite element method (SFEM) is developed.

Вступ. Значна кількість відповідальних елементів машинобудівних конструкцій являють собою просторові призматичні тіла складної форми, що перебувають під дією довільно розподілених у просторі та часі силового і температурного навантажень. Визначення їх несучої здатності потребує розв'язання просторових задач термов'язкопружнопластичності, що є можливим лише із застосуванням чисельних методів, зокрема методу скінченних елементів (МСЕ) та його ефективних модифікацій, до яких відноситься напіваналітичний метод скінченних елементів (НМСЕ). На теперішній час досвід застосування НМСЕ поширений на широке коло задач механіки деформівного твердого тіла [1-11].

Урахування нелінійного деформування (деформацій пластичності і повзучості) потребує залучення покрокових алгоритмів моделювання процесу навантаження й ітераційного розв'язання отримуваних систем рівнянь на кожному кроці вирішення задачі. При цьому кількість кроків розв'язання задачі при моделюванні тривалого деформування в умовах повзучості може становити порядка тисячі, а, зважаючи на складність форми досліджуваних об'єктів і суттєво просторовий характер напружено-деформованого стану, кількість невідомих становитиме 100 000 і більше. У випадку змінного в часі навантаження, зумовленого зокрема наявністю температурного поля, складність задачі і, пов'язаний з цим обсяг обчислювальних витрат збільшується на порядок.

Суттєве зменшення кількості невідомих дискретної моделі досягається із використанням косокутних скінченних елементів (СЕ), розв'язувальні співвідношення яких враховують змінність компонент метричного тензору в площині поперечного перерізу СЕ. Це потребує розширення скінченноелементної бази в напрямку створення нових модифікацій СЕ, що враховують зазначені геометричні особливості СЕ на основі розгляду напружено-деформованого стану досліджуваних об'єктів в термінах фізичних компонент тензорів напружень та дефо-

рмацій. Як свідчить аналіз літературних джерел, область застосування косокутних СЕ обмежена неоднорідними косокутними СЕ з шарнірними граничними умовами [11]. Тому є необхідним розроблення неоднорідного косокутного СЕ, що дозволяє моделювати довільні граничні умови.

Не менш важливим способом зменшення обсягу обчислювальних витрат є створення ефективних алгоритмів розв'язання систем нелінійних рівнянь. Розгляд просторових задач термов'язкопружнопластичності вимагає обчислення напружень не лише з врахування деформацій пластичності, повзучості та пошкодженості, а також врахування величин температурних деформацій та формування на їх основі вектора вузлових реакцій.

Вихідні співвідношення. При термов'язкопружнопластичному деформуванні просторових тіл компоненти прирощення повної деформації $d\varepsilon_{ij}$ можуть бути подані сумою прирощень пружних деформацій $d\varepsilon_{ij}^{e}$, температурних деформацій $d\varepsilon_{ij}^{T}$, деформацій пластичності $d\varepsilon_{ij}^{p}$ та деформацій повзучості $d\varepsilon_{ij}^{c}$, тобто

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^{e} + d\varepsilon_{ij}^{T} + d\varepsilon_{ij}^{p} + d\varepsilon_{ij}^{c}. \tag{1}$$

Компоненти тензору напружень σ^{ij} запишемо через компоненти тензору пружних деформацій у відповідності із узагальненим законом Гука [3]

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl}\varepsilon_{kl}^{e}. \tag{2}$$

де C^{ijkl} – компоненти тензора пружних сталих.

В місцевій системі координат СЕ фізичні компоненти тензора напружень і деформацій визначаються виразами [2]

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \sigma^{ij}\sqrt{g_{(ii)}g_{(jj)}}, \tag{3}$$

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij}\Big/\sqrt{g_{(ii)}g_{(jj)}}. \tag{4}$$

Для ізотропного матеріалу температурні складові компонент тензора деформацій визначаються за формулою

$$\varepsilon_{ij}^{T} = \alpha_T \Delta T g_{ij}, \tag{5}$$

де $\alpha_T = \alpha_T(z^{k'}, T)$ – коефіцієнт лінійного розширення матеріалу;

$\Delta T = T - T_0$ – приріст температури в досліджуваній точці тіла відносно його вихідного стану при $T = T_0$.

Область пружних деформацій обмежена у просторі напружень поверхнею текучості [5]

$$f_p\left(\sigma^{ij}, \vartheta, T\right) = 0. \tag{6}$$

У відповідності з гіпотезою ізотропного зміцнення при умові текучості Мізеса рівняння поверхні текучості має вигляд

$$f_p = \frac{1}{2}s_{ij}s^{ij} - \left[\tau_s\left(\vartheta, T\right)\right]^2 = 0, \tag{7}$$

де $\tau_s(\vartheta, T)$ – межа текучості при чистому зсуві;

ϑ – параметр зміцнення Одквіста, $\vartheta = \int_{\varepsilon_{ij}^p} \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p}$;

s_{ij} – компоненти девіатора напружень, що пов'язаний із пластичними деформаціями у відповідності з асоційованим законом пластичного течіння

$$\varepsilon_{ij}^p = \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial s^{ij}} = \lambda_p s_{ij} . \tag{8}$$

При виникненні деформацій повзучості по аналогії з (7) до розгляду запроваджується поверхня повзучості – функція другого інваріанту девіатора головних напружень, що обмежує область деформацій повзучості у просторі головних напружень [6, 8]

$$f_c = \frac{1}{2} s_{ij} s^{ij} - \left[\tau_{i_c} \left(\vartheta_c, T, \xi_i^c, \omega \right) \right]^2 = 0 , \tag{9}$$

де $\vartheta_c = \int_{\varepsilon_{ij}^c} \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij}^c d\varepsilon_{ij}^c}$ – параметр Одквіста, при повзучості;

$\xi_i^c = \frac{d\varepsilon_i^c}{dt}$ – інтенсивність швидкості деформацій повзучості;

ε_i^c – інтенсивність деформацій повзучості;

t – час;

ω – параметр пошкодженості Качанова-Работнова, $0 \le \omega \le 1$ [8].

Вираз (9) можна подати у вигляді наступного рівняння

$$\xi_i^c = f_1 \left(\sigma^{ij}, \vartheta_c, \omega, T \right). \tag{10}$$

Конкретизація виразу (10) може бути здійснена, наприклад, на основі теорії накопичення пошкоджень Ю.М. Работнова

$$\xi_i^c = D \left(\frac{\sigma_i}{1 - \omega} \right)^m , \tag{11}$$

де $\sigma_i = \sqrt{3 s_{ij} s^{ij} / 2}$ – інтенсивність нормальних напружень;

D, m – константи матеріалу, що залежать від температури і визначаються з базових експериментів на повзучість.

Взаємозв'язок компонент тензора швидкостей деформацій повзучості ξ_{ij}^c і напружень при застосуванні вище перелічених теорій повзучості приймається у вигляді:

$$\xi_{ij}^c = \frac{d\varepsilon_{ij}^c}{dt} = \frac{3}{2} \xi_i^c \frac{s_{ij}}{\sigma_i} . \tag{12}$$

Для опису змінення з часом параметру пошкодженості застосовується кінетичне рівняння:

$$\frac{d\omega}{dt} = f_2\left(\sigma^{ij}, \vartheta_c, \omega, T\right), \tag{13}$$

або у вигляді узагальненого виразу [4]:

$$\frac{d\omega}{dt} = C\left[\frac{\sigma_e}{1-\omega^r}\right]^m \cdot \frac{1}{\left(1-\omega\right)^q}\omega^\beta \,. \tag{14}$$

Розглянуті співвідношення дозволяють проводити опис процесів нелінійного деформування просторових тіл, що знаходяться в неоднорідному температурному полі.

Неоднорідний косокутний призматичний скінченний елемент з довільними граничними умовами. Для апроксимації просторових неоднорідних призматичних тіл використовуються просторові неоднорідні призматичні скінченні елементи (рис.1), що являють собою призму, утворену переміщенням чотирикутника довільного обрису вздовж напрямної прямої.

Будемо вважати, що компоненти тензору пружних сталих та визначник матриці, що складена з компонент метричного тензору g_{ij}, а також коефіцієнт лінійного розширення α_T дорівнюють значенням відповідних величин у центрі поперечного перетину СЕ:

$$C^{ijkl} \approx \overset{\circ}{C}{}^{ijkl} = C^{ijkl}\big|_{x^\alpha=0}; \quad g = \overset{\circ}{g} = g\big|_{x^\alpha=0}; \quad \alpha_T = \overset{\circ}{\alpha}_T = \alpha_T\big|_{x^\alpha=0}. \tag{15}$$

Розподіл переміщень і температури у межах поперечного перетину СЕ описується білінійним законом:

$$u_{m'} = \sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1} u_{m'(S_1S_2)}\left(\frac{1}{2}S_1x^1 + \frac{1}{2}S_2x^2 + S_1S_2x^1x^2 + \frac{1}{4}\right), \tag{16}$$

$$T = \sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1} T_{(S_1S_2)}\left(\frac{1}{2}S_1x^1 + \frac{1}{2}S_2x^2 + S_1S_2x^1x^2 + \frac{1}{4}\right), \tag{17}$$

де $u_{m'(S_1S_2)}$, $T_{(S_1S_2)}$ – вузлові значення переміщень і температури, що подані компонентами в базисній системі координат;

S_1 і S_2 – координати розташування вузлів відносно центру поперечного перетину елементу в місцевій системі координат x^i.

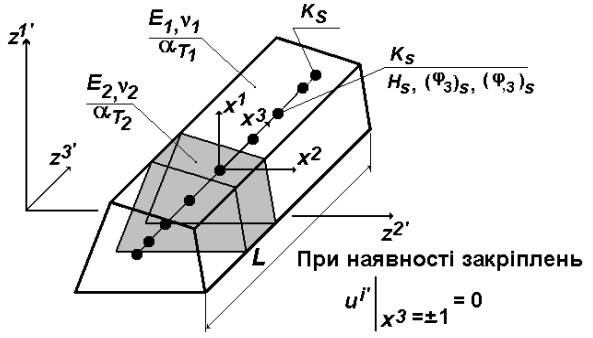

Рис. 1 – Неоднорідний призматичний скінченний елемент в базисній системі координат

В напрямку твірної переміщення, температура та їх похідні по напрямку x^3 апроксимуються розкладенням за системою координатних функцій $\varphi^{(l)}$ – поліномів Лагранжа ($l = 0, 1$) і Міхліна ($l = 2, \ldots L$)

$$u_{m'} = \sum_{l=0}^{L} u^l_{m'}\varphi^{(l)} \;;\; u_{m',3} = \sum_{l=0}^{L} u^l_{m'}\varphi^{(l)}_{,3}; \tag{18}$$

$$T = \sum_{l=0}^{L} T^l \varphi^{(l)} \; ; \; T_{,3} = \sum_{l=0}^{L} T^l \varphi_{,3}^{(l)}, \tag{19}$$

де $\varphi^{(0)} = \frac{1}{2}(1-x^3), \quad \varphi^{(1)} = \frac{1}{2}(1+x^3)$;

$$\varphi^{(l)} = f^{(l)} p^{(l)} - f^{(l-2)} p^{(l-2)}, \quad f^{(l)} = \sqrt{(4l^2-1)^{-1}} \; ;$$

$$p^{(l)} = \sqrt{\frac{2l+1}{2}} \sum_{k=0}^{l} \frac{(-1)^k (l+k)!}{(l-k)!(k!)^2 \, 2^{k+1}} \left[(1-x^3)^k + (-1)^l (1+x^3)^k \right].$$

Застосована система функцій задовольняє умови повноти та лінійної незалежності і дозволяє найбільш просто і ефективно формулювати різні види граничних умов на торцях тіла традиційним для МСЕ засобом, тобто шляхом виключення відповідних рівнянь [1].

Запропоновані скінченні елементи орієнтовані на розрахунок широкого класу призматичних тіл. Вони забезпечують не тільки високу точність подання напружено-деформованого стану конструкцій складної форми, але і високу швидкість збіжності результатів до точного рішення. Як показано в роботі [1], застосування моментної схеми скінченних елементів (МССЕ) [9, 10] дозволяє істотно підвищити ефективність чисельного дослідження просторових конструкцій на основі МСЕ. Окрім того МССЕ забезпечує відсутність деформацій при зміщенні тіла як жорсткого цілого, а також усуває явище «хибного зсуву», що виникає при розрахунку тонкостінних конструкцій за допомогою просторових СЕ.

Подамо компоненти тензору повних фізичних деформацій в поперечних перетинах, що відповідають точкам інтегрування, у відповідності до моментної схеми скінченних елементів (МССЕ) [10] відрізками ряду Маклорена:

$$\tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} = \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \, x^{(3-\alpha)} \; ; \quad \tilde{\varepsilon}_{12} = \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{12} \; ;$$

$$\tilde{\varepsilon}_{\alpha 3} = \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha 3} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha 3,(3-\alpha)} \, x^{(3-\alpha)} \; ; \quad \tilde{\varepsilon}_{33} = \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,\beta} \, x^{\beta} \; , \tag{20}$$

де $\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ij} = \tilde{\varepsilon}_{ij}\Big|_{x^\alpha = 0}, \quad \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ij,\beta} = \left.\frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{ij}}{\partial x^\beta}\right|_{x^\beta = 0}$.

У випадку лінійного зв'язку між фізичними компонентами тензора напружень та деформацій використовуємо узагальнений закон Гука:

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \tilde{C}^{ijkl} \tilde{\varepsilon}_{kl} \, , \tag{21}$$

де $\tilde{C}^{ijkl} = C^{ijkl} \sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)} g_{(kk)} g_{(ll)}}$.

Запишемо вираз для компонент тензора напружень через коефіцієнти розкладу деформацій в ряд Маклорена (20):

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \overset{\circ}{\tilde{C}}{}^{ij11} \left(\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{11} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{11,2} \, x^2 \right) + 2 \overset{\circ}{\tilde{C}}{}^{ij12} \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{12} + \overset{\circ}{\tilde{C}}{}^{ij22} \left(\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{22} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{22,1} \, x^1 \right) +$$

$$+2 \overset{\circ}{\tilde{C}}{}^{ij13} \left(\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{13} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{13,2} \, x^2 \right) + 2 \overset{\circ}{\tilde{C}}{}^{ij23} \left(\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{23} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{23,1} \, x^1 \right) + \overset{\circ}{\tilde{C}}{}^{ij33} \left(\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,1} \, x^1 + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,2} \, x^2 \right). \tag{22}$$

Після перегрупування доданків, що містять величини деформацій та їх похідних, застосовуючи позначення

$$\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{ij} = \overset{\circ}{\tilde{C}}{}^{ijkl}\,\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{kl}\ , \qquad \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{ij}_{,(3-\alpha)} = \overset{\circ}{\tilde{C}}{}^{ij11}\,\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} + \overset{\circ}{\tilde{C}}{}^{ij\alpha 3}\,\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha 3,(3-\alpha)} + \overset{\circ}{\tilde{C}}{}^{ij33}\,\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,(3-\alpha)}\ , \qquad (23)$$

отримаємо скорочений запис закону Гука з урахуванням розкладу деформацій в ряд Маклорена

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{ij} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{ij}_{,2}x^2 + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{ij}_{,1}x^1. \qquad (24)$$

Відкидаючи з (24) члени вигляду $\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{i\alpha}_{,\alpha}$ як ті, що не дають вкладу в енергію деформування елементу, подамо напруження відрізками ряду Маклорена

$$\tilde{\sigma}^{\alpha(\alpha)} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)}x^{(3-\alpha)}; \qquad \tilde{\sigma}^{12} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{12};$$

$$\tilde{\sigma}^{\alpha 3} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha 3} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha 3}_{,(3-\alpha)}x^{(3-\alpha)}; \qquad \tilde{\sigma}^{33} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{33} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{33}_{,\alpha}x^{\alpha}, \qquad (25)$$

де значення коефіцієнтів $\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{ij}$ і $\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{ij}_{,\alpha}$ обчислюються в точках інтегрування K_m, що розташовані в поперечних перетинах вздовж вісі x^3 (рис.1).

Запишемо коефіцієнти розкладання компонент тензора фізичних напружень в ряд Маклорена з урахуванням їх подання в місцевій системі координат (3)

$$\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha(\alpha)} = \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}\,\overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha(\alpha)}; \quad \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{12} = \overset{\circ}{g}_{12}\,\overset{\circ}{\sigma}{}^{12}; \quad \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha 3} = \sqrt{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}\,\overset{\circ}{g}_{33}}\,\overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha 3}; \quad \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{33} = \overset{\circ}{g}_{33}\,\overset{\circ}{\sigma}{}^{33};$$

$$\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)} = \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}\,\overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)}; \quad \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha 3}_{,(3-\alpha)} = \sqrt{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}\,\overset{\circ}{g}_{33}}\,\overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha 3}_{,(3-\alpha)}; \quad \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{33}_{,\alpha} = \overset{\circ}{g}_{33}\,\overset{\circ}{\sigma}{}^{33}_{,(3-\alpha)}. \qquad (26)$$

Аналогічно, коефіцієнти розкладу компонент повних фізичних деформацій в ряд Маклорена матимуть вигляд

$$\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha)} = \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}}\,\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}; \quad \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{12} = \frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{11}\,\overset{\circ}{g}_{22}}}\,\overset{\circ}{\varepsilon}_{12}; \quad \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha 3} = \frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}\,\overset{\circ}{g}_{33}}}\,\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3};$$

$$\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33} = \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{33}}\,\overset{\circ}{\varepsilon}_{33}; \quad \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} = \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}}\left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}\,\overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}\right); \qquad (27)$$

$$\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha 3,(3-\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}\,\overset{\circ}{g}_{33}}}\left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} - \frac{1}{2}\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3}\,\overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}\right); \quad \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,\beta} = \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{33}}\,\overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\beta},$$

де $\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij}\big|_{x^\alpha=0}$; $\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\beta} = \left.\dfrac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x^\beta}\right|_{x^\alpha=0}$; $\overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} = \dfrac{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}}{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}}$; $\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)} = g_{\alpha(\alpha)}\big|_{x^\beta=0}$;

$$\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} = \left.\frac{\partial g_{\alpha(\alpha)}}{\partial x^{(3-\alpha)}}\right|_{x^\beta=0}; \quad \left.\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x^1 \partial x^2}\right|_{x^\beta=0} \approx 0.$$

Запишемо коефіцієнти розкладу деформацій (27) через переміщення в базисній системі координат

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{m',i} z^{m'}_{,j} + u_{m',j} z^{m'}_{,i}\right)\Big|_{x^\alpha=0};$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} = \left.\frac{\partial \varepsilon_{\alpha(\alpha)}}{\partial x^{(3-\alpha)}}\right|_{x^\alpha=0} = \left.\frac{\partial\left(u_{\gamma',\alpha} z^{\gamma'}_{,\alpha}\right)}{\partial x^{(3-\alpha)}}\right|_{x^\alpha=0} = u_{\gamma',12} z^{\gamma'}_{,\alpha} + u_{\gamma',\alpha} z^{\gamma'}_{,12}\Big|_{x^\alpha=0}; \tag{28}$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} = \frac{1}{2}\left(u_{\gamma',3(3-\alpha)} z^{\gamma'}_{,\alpha} + u_{\gamma',3} z^{\gamma'}_{,12} + u_{3',12} z^{3'}_{,3}\right)\Big|_{x^\alpha=0}; \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} = u_{3',3\alpha} z^{3'}_{,3}\Big|_{x^\alpha=0}.$$

Введемо наступні позначення для значень похідних від переміщень і компонент тензора перетворення $z^{m'}_{,i}$ в центрі СЕ: $u_{m',i}\big|_{x^\gamma=0} = \overset{\circ}{u}_{m',i}$, $z^{m'}_{,i}\big|_{x^\gamma=0} = \overset{\circ}{z}{}^{m'}_{,i}$. Тоді

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{u}_{m',i}\,\overset{\circ}{z}{}^{m'}_{,j} + \overset{\circ}{u}_{m',j}\,\overset{\circ}{z}{}^{m'}_{,i}\right); \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} = \overset{\circ}{u}_{\gamma',12}\,\overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,\alpha} + \overset{\circ}{u}_{\gamma',\alpha}\,\overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,12};$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} = \frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{u}_{\gamma',3(3-\alpha)}\,\overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,\alpha} + \overset{\circ}{u}_{\gamma',3}\,\overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,12} + \overset{\circ}{u}_{3',12}\,\overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3}\right); \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} = \overset{\circ}{u}_{3',3\alpha}\,\overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3}. \tag{29}$$

З урахуванням прийнятого закону розподілу переміщень в поперечному перерізі СЕ (16) та в напрямку твірної (18), отримаємо вирази для визначення коефіцієнтів розкладу деформацій через коефіцієнти розкладу вузлових переміщень

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\left[\sum_{l=0}^{L} u^l_{\gamma'(S_1S_2)}\left(S_\alpha\,\overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,\beta} + S_\beta\,\overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,\alpha}\right)\varphi^{(l)}\right];$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} = \frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\left[\sum_{l=0}^{L}\left(u^l_{3'(S_1S_2)} S_\alpha\,\overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3}\varphi^{(l)} + u^l_{\gamma'(S_1S_2)}\frac{1}{2}\overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,\alpha}\varphi^{(l)}_{,3}\right)\right];$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{33} = \frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\left[\sum_{l=0}^{L} u^l_{3'(S_1S_2)} z^{3'}_{,3}\varphi^{(l)}_{,3}\right]; \tag{30}$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} = \frac{1}{2}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\left[\sum_{l=0}^{L} u^l_{\gamma'(S_1S_2)}\left(2S_1S_2\,\overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,\alpha} + S_\alpha\,\overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,12}\right)\varphi^{(l)}\right];$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} = \frac{1}{4}\sum_{S_1\pm1}\sum_{S_2\pm1}\left[\sum_{l=0}^{L}\left\{u^l_{3'(S_1S_2)}\left(2S_1S_2\,\overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3}\right)\varphi^{(l)} + u^l_{\gamma'(S_1S_2)}\left(S_{(3-\alpha)}\,\overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,\alpha} + \frac{1}{2}\overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,12}\right)\varphi^{(l)}_{,3}\right\}\right];$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} = \frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\left[\sum_{l=0}^{L} u^{l}_{3'(S_1S_2)}\left(2S_\alpha \overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3}\right)\varphi^{(l)}_{,3}\right].$$

Виведення рівнянь рівноваги та матриці жорсткості неоднорідного косокутного призматичного скінченного елемента. Опис процесу деформування просторових тіл здійснюється у відповідності до варіаційного принципу можливих переміщень. Рівняння рівноваги системи N СЕ, що апроксимують досліджуваний об'єкт, має вигляд

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\delta W_n - \delta A_n\right) = 0\,. \tag{31}$$

Варіація енергії деформації одного СЕ може бути записана у вигляді

$$\delta W = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}}\int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}}\int_{x^3=-1}^{x^3=1}\tilde{\sigma}^{ij}\delta\tilde{\varepsilon}_{ij}\sqrt{\overset{\circ}{g}}\,dx^1dx^2dx^3\,. \tag{32}$$

Відповідно до МССЕ, фізичні компоненти тензору напружень (25) і тензору деформацій (20) виражають через їх значення у центрі елементу

$$\begin{aligned}\delta W = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}}\int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}}\int_{x^3=-1}^{x^3=1}\Bigg[&\left(\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)}x^{(3-\alpha)}\right)\delta\left(\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}\,x^{(3-\alpha)}\right) + \\ &+2\,\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{12}\delta\,\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{12} + \left(\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha 3} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha 3}_{,(3-\alpha)}x^{(3-\alpha)}\right)\delta\left(\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha 3} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha 3,(3-\alpha)}\,x^{(3-\alpha)}\right) + \\ &+\left(\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{33} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{33}_{,\alpha}x^{\alpha}\right)\delta\left(\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,\beta}\,x^{\beta}\right)\Bigg]\sqrt{\overset{\circ}{g}}\,dx^1dx^2dx^3\,.\end{aligned} \tag{33}$$

Виконуючи інтегрування в поперечному перерізі елементу для варіації енергії деформації одного СЕ одержимо

$$\delta W = \int_{x_3=-1}^{x_3=1}\left[\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{ij}\delta\,\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ij} + \frac{1}{12}\left(\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)}\delta\,\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha 3}_{,(3-\alpha)}\delta\,\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha 3,(3-\alpha)} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{33}_{,\alpha}\delta\,\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,\alpha}\right)\right]\sqrt{\overset{\circ}{g}}\,dx^3\,. \tag{34}$$

З використанням отриманих вище виразів для коефіцієнтів розкладу компонентів фізичних напружень (26) і деформацій (27) в ряд Маклорена, вираз для варіації енергії деформування одного СЕ набуде вигляду

$$\begin{aligned}\delta W = \int_{x_3=-1}^{x_3=1}\Bigg[&\overset{\circ}{\sigma}{}^{ij}\,\delta\,\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{12}\Bigg(\overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)}\delta\left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}\,\overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}\right) + \\ &+\overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha 3}_{,(3-\alpha)}\delta\left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} - \frac{1}{2}\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3}\,\overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}\right) + \sigma,^{33}_{\alpha}\,\delta\,\overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha}\Bigg)\Bigg]\sqrt{\overset{\circ}{g}}\,dx^3\,,\end{aligned} \tag{35}$$

або, у матричній формі

$$\delta W = \int_{x^3=-1}^{x^3=1}\left\{\left(\delta\left\{\overset{\circ}{\varepsilon}\right\}^T\right)\left\{\overset{\circ}{\sigma}\right\} + \frac{1}{12}\left[\left(\delta\left\{\overset{\circ}{\varepsilon}_{,1}\right\}^T\right)\left\{\overset{\circ}{\sigma}_{,1}\right\} + \left(\delta\left\{\overset{\circ}{\varepsilon}_{,2}\right\}^T\right)\left\{\overset{\circ}{\sigma}_{,2}\right\}\right]\right\}\sqrt{\overset{\circ}{g}}\,dx^3, \tag{36}$$

де $\left\{\overset{\circ}{\varepsilon}\right\}^T = \left\{\overset{\circ}{\varepsilon}_{11} \quad 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{12} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{22} \quad 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{23} \quad 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{13} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}\right\}$;

$$\left\{\overset{\circ}{\varepsilon}_{,(3-\alpha)}\right\}^T = \left\{\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}\overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \quad 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3}\overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,(3-\alpha)}\right\};$$

$$\left\{\overset{\circ}{\sigma}\right\}^T = \left\{\overset{\circ}{\sigma}^{11} \quad \overset{\circ}{\sigma}^{12} \quad \overset{\circ}{\sigma}^{22} \quad \overset{\circ}{\sigma}^{23} \quad \overset{\circ}{\sigma}^{13} \quad \overset{\circ}{\sigma}^{33}\right\};$$

$$\left\{\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}\right\}^T = \left\{\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{(3-\alpha)(3-\alpha)} \quad \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{(3-\alpha)3} \quad \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{33}\right\}.$$

Співвідношення, що виражають залежність між коефіцієнтами розкладу деформацій у ряд Маклорена і коефіцієнтами розкладу переміщень за поліномами, у матричній формі мають наступний вигляд

$$\left\{\overset{\circ}{\varepsilon}\right\} = \sum_{l=0}^{L}\left(\left[\overset{\circ}{B}_1\right]\varphi^{(l)} + \left[\overset{\circ}{B}_2\right]\varphi_{,3}^{(l)}\right)\{u\}_l;$$

$$\left\{\overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha}\right\} = \sum_{l=0}^{L}\left(\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha}\right]\varphi^{(l)} + \left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha}\right]\varphi_{,3}^{(l)}\right)\{u\}_l, \qquad (37)$$

де

$$\{u\}_l^T = \left\{u_{i(-1;-1)}^l \quad u_{i(1;-1)}^l \quad u_{i(-1;1)}^l \quad u_{i(1;1)}^l\right\};$$

$$\left[\overset{\circ}{B}_\alpha\right] = \left[\left[\overset{\circ}{B}_\alpha\right]^{(-1;-1)} \quad \left[\overset{\circ}{B}_\alpha\right]^{(1;-1)} \quad \left[\overset{\circ}{B}_\alpha\right]^{(-1;1)} \quad \left[\overset{\circ}{B}_\alpha\right]^{(1;1)}\right];$$

$$\left[\overset{\circ}{B}_{\alpha,\beta}\right] = \left[\left[\overset{\circ}{B}_{\alpha,\beta}\right]^{(-1;-1)} \quad \left[\overset{\circ}{B}_{\alpha,\beta}\right]^{(1;-1)} \quad \left[\overset{\circ}{B}_{\alpha,\beta}\right]^{(-1;1)} \quad \left[\overset{\circ}{B}_{\alpha,\beta}\right]^{(1;1)}\right]. \qquad (38)$$

Значення компонент підматриць $\left[\overset{\circ}{B}_\alpha\right]^{(S_1,S_2)}$, $\left[\overset{\circ}{B}_{\alpha,\beta}\right]^{(S_1,S_2)}$ у виразі (38) для неоднорідних косокутних призматичних елементів визначаються згідно формул (30)

$$\left[\overset{\circ}{B}_1\right]^{(S_1,S_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}S_1\overset{\circ}{z}_{,1}^{1'} & \frac{1}{2}S_1\overset{\circ}{z}_{,1}^{2'} & 0 \\ \frac{1}{2}\left(S_2\overset{\circ}{z}_{,1}^{1'} + S_1\overset{\circ}{z}_{,2}^{1'}\right) & \frac{1}{2}\left(S_2\overset{\circ}{z}_{,1}^{2'} + S_1\overset{\circ}{z}_{,2}^{2'}\right) & 0 \\ \frac{1}{2}S_2\overset{\circ}{z}_{,2}^{1} & \frac{1}{2}S_2\overset{\circ}{z}_{,2}^{2'} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\overset{\circ}{z}_{,3}^{3'}S_2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\overset{\circ}{z}_{,3}^{3'}S_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\left[\overset{\circ}{B}_2\right]^{(S_1,S_2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4}\overset{\circ}{z}{}^{1'}_{,2} & \frac{1}{4}\overset{\circ}{z}{}^{2'}_{,2} & 0 \\ \frac{1}{4}\overset{\circ}{z}{}^{1'}_{,1} & \frac{1}{4}\overset{\circ}{z}{}^{2'}_{,1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}\overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3} \end{bmatrix}; \quad \left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha}\right]^{(S_1,S_2)} = \begin{bmatrix} \left(B_{1,\alpha}\right)_{11} & \left(B_{1,\alpha}\right)_{12} & 0 \\ 0 & 0 & \left(B_{1,\alpha}\right)_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

де $\left(B_{1,\alpha}\right)_{11} = S_1 S_2 \overset{\circ}{z}{}^{1'}_{,(3-\alpha)} + \frac{S_{(3-\alpha)}}{2}\overset{\circ}{z}{}^{1'}_{,12} - \frac{1}{2}S_{(3-\alpha)}\overset{\circ}{z}{}^{1'}_{,(3-\alpha)}\overset{\circ}{h}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha};$

$\left(B_{1,\alpha}\right)_{12} = S_1 S_2 \overset{\circ}{z}{}^{2'}_{,(3-\alpha)} + \frac{S_{(3-\alpha)}}{2}\overset{\circ}{z}{}^{2'}_{,12} - \frac{1}{2}S_{(3-\alpha)}\overset{\circ}{z}{}^{2'}_{,(3-\alpha)}\overset{\circ}{h}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha};$

$\left(B_{1,\alpha}\right)_{23} = S_1 S_2 \overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3} - \frac{1}{4}S_{(3-\alpha)}\overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3}\overset{\circ}{h}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha};$

$$\left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha}\right]^{(S_1,S_2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \left(B_{2,\alpha}\right)_{21} & \left(B_{2,\alpha}\right)_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}S_\alpha \overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3} \end{bmatrix},$$

$\left(B_{2,\alpha}\right)_{21} = \frac{1}{4}\left(2S_\alpha \overset{\circ}{z}{}^{1'}_{,(3-\alpha)} + \overset{\circ}{z}{}^{1'}_{,12}\right) - \frac{1}{8}\overset{\circ}{z}{}^{1'}_{,(3-\alpha)}\overset{\circ}{h}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha};$

$\left(B_{2,\alpha}\right)_{22} = \frac{1}{4}\left(2S_\alpha \overset{\circ}{z}{}^{2'}_{,(3-\alpha)} + \overset{\circ}{z}{}^{2'}_{,12}\right) - \frac{1}{8}\overset{\circ}{z}{}^{2'}_{,(3-\alpha)}\overset{\circ}{h}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha}.$

З урахуванням подання коефіцієнтів розкладу деформацій (37) через коефіцієнти розкладу переміщень у ряд Маклорена, варіація енергії деформації одного СЕ може бути подана у вигляді

$$\delta W = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \sum_{l=0}^{L} \left(\delta\{u_l\}^T \left(\left[\overset{\circ}{B}_1\right]^T \varphi^{(l)} + \left[\overset{\circ}{B}_2\right]^T \varphi_{,3}^{(l)} \right) \left\{\overset{\circ}{\sigma}\right\} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{2} \left(\delta\{u_l\}^T \left(\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha}\right]^T \varphi^{(l)} + \left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha}\right]^T \varphi_{,3}^{(l)} \right) \left\{\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}\right\} \right) \right) \sqrt{\overset{\circ}{g}}\, dx^3 = \sum_{l=0}^{L} \delta\{u_l\}^T \left\{\overset{\circ}{\overline{R}}\right\}_l, \quad (39)$$

де $\left\{\overset{\circ}{\overline{R}}\right\}_l$ – вектор вузлових реакцій СЕ,

$$\left\{\overset{\circ}{\overline{R}}_l\right\} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left[\left\{ \left[\overset{\circ}{B}_1\right]^T \varphi^{(l)} + \left[\overset{\circ}{B}_2\right]^T \varphi_{,3}^{(l)} \right\} \left\{\overset{\circ}{\sigma}\right\} + \right.$$

$$+\frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{2}\left\{\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha}\right]^T\varphi^{(l)}+\left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha}\right]^T\varphi_{,3}^{(l)}\right\}\left\{\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}\right\}\Bigg\}\Bigg]dx^3\sqrt{\overset{\circ}{g}}=$$

$$=\Bigg[\left[\overset{\circ}{B}_1\right]^T\int_{x^3=-1}^{x^3=1}\left\{\overset{\circ}{\sigma}\right\}\varphi^{(l)}dx^3+\left[\overset{\circ}{B}_2\right]^T\int_{x^3=-1}^{x^3=1}\left\{\overset{\circ}{\sigma}\right\}\varphi_{,3}^{(l)}dx^3+$$

$$+\frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha}\right]^T\int_{x^3=-1}^{x^3=1}\left\{\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}\right\}\varphi^{(l)}dx^3+\left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha}\right]^T\int_{x^3=-1}^{x^3=1}\left\{\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}\right\}\varphi_{,3}^{(l)}dx^3\right)\Bigg]\sqrt{\overset{\circ}{g}}\ . \qquad (40)$$

Виконуємо чисельне інтегрування за напрямком x^3 та отримуємо вираз для обчислення компонент вектору вузлових реакцій СЕ

$$\left\{\overset{\circ}{\overline{R}}_l\right\}=\left\{\left[\overset{\circ}{B}_1\right]^{\dot{O}}\left\{\sigma\right\}_l+\left[\overset{\circ}{B}_2\right]^{\dot{O}}\left\{\sigma\right\}_{l3}+\frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha}\right]^{\dot{O}}\left\{\sigma\right\}_{l\alpha}+\left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha}\right]^{\dot{O}}\left\{\sigma\right\}_{l\alpha 3}\right)\right\}\sqrt{\overset{\circ}{g}}\ . \qquad (41)$$

Коефіцієнти прирощення напружень пов'язані з коефіцієнтами розкладання прирощень деформацій законом Гука, векторна форма якого має вигляд:

$$\left\{\Delta\overset{\circ}{\sigma}\right\}=\left[\overset{\circ}{D}\right]\left\{\Delta\overset{\circ}{\varepsilon}\right\},\ \left\{\Delta\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}\right\}=\left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha}\right]\left\{\Delta\overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha}\right\}, \qquad (42)$$

де, у відповідності із законом Гука (2),

$$\left[\overset{\circ}{D}\right]=\left[\overset{\circ}{C}{}^{ijkl}\right],\quad \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha}\right]=\left[\left[\overset{\circ}{C}{}^{ij(3-\alpha)(3-\alpha)}\right]\left[\overset{\circ}{C}{}^{ij(3-\alpha)3}\right]\left[\overset{\circ}{C}{}^{ij33}\right]\right].$$

З урахуванням цього вираз для варіації енергій деформування СЕ (39) набуває вигляду

$$\delta W=\int_{x^3=-1}^{x^3=1}\left\{\delta\left\{\Delta\overset{\circ}{\varepsilon}\right\}^T\left[\overset{\circ}{D}\right]\left\{\Delta\overset{\circ}{\varepsilon}\right\}+\frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\delta\left\{\Delta\overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha}\right\}^T\left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha}\right]\left\{\Delta\overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha}\right\}\right)\right\}\sqrt{\overset{\circ}{g}}dx^3. \qquad (43)$$

Враховуючи залежності між коефіцієнтами розкладу прирощень деформацій і коефіцієнтами розкладу переміщень за поліномами, подамо отриманий вираз варіації енергії СЕ у вигляді

$$\delta W=\sum_{l=0}^{L}\sum_{n=0}^{L}\left(\delta\left\{u\right\}_l^T\right)\left[K\right]_{ln}\left\{u\right\}_n, \qquad (44)$$

де $\left[K\right]_{ln}$ – матриця жорсткості неоднорідного косокутного призматичного СЕ

$$\left[K\right]_{ln}=\int_{x^3=-1}^{x^3=1}\left\{\left(\left[\overset{\circ}{B}_1\right]^T\varphi^{(l)}+\left[\overset{\circ}{B}_2\right]^T\varphi_{,3}^{(l)}\right)\left[\overset{\circ}{D}\right]\left(\left[\overset{\circ}{B}_1\right]\varphi^{(n)}+\left[\overset{\circ}{B}_2\right]\varphi_{,3}^{(n)}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{2}\left[\left(\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha}\right]^T\varphi^{(l)}+\left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha}\right]^T\varphi_{,3}^{(l)}\right)\left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha}\right]\left(\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha}\right]\varphi^{(n)}+\left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha}\right]\varphi_{,3}^{(n)}\right)\right]\right\}\sqrt{\overset{\circ}{g}}dx^3. \qquad (45)$$

Після виконання чисельного інтегрування за напрямком x^3 з урахуванням неоднорідності вираз для матриці жорсткості СЕ матиме вигляд

$$[K]_{ln}=\left\{\left[\overset{\circ}{B}_1\right]^T[D]_{00}^{ln}\left[\overset{\circ}{B}_1\right]+\left[\overset{\circ}{B}_2\right]^T[D]_{30}^{ln}\left[\overset{\circ}{B}_1\right]+\left[\overset{\circ}{B}_1\right]^T[D]_{03}^{ln}\left[\overset{\circ}{B}_2\right]+\right.$$

$$+\left[\overset{\circ}{B}_2\right]^T [D]^{ln}_{33}\left[\overset{\circ}{B}_2\right]+\frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha}\right]^T [D]^{ln}_{00\alpha}\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha}\right]+\left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha}\right]^T [D]^{ln}_{30\alpha}\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha}\right]+\right.$$

$$\left.+\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha}\right]^T [D]^{ln}_{03\alpha}\left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha}\right]+\left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha}\right]^T [D]^{ln}_{33\alpha}\left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha}\right]\right)\Bigg\}\sqrt{\overset{\circ}{g}}\,. \qquad (46)$$

Необхідно зауважити, що при розв'язанні задач термов'язкопружнопластичності, для кожної з S точок інтегрування обчислюються не тільки значення координат x^3, значення базисних функцій $\left(\varphi^l\right)_s$, їх похідних $\left(\varphi^l_{,3}\right)_s$, та вагових функцій H_s, але й величини температур, величини приростів деформацій пластичності і повзучості, їх накопичені величини, а також величини параметра пошкодженості матеріалу.

Отримані вирази матриці жорсткості (46) і вектору вузлових реакцій (41) неоднорідного косокутного призматичного скінченного елемента дозволяють будувати дискретні моделі для неоднорідних призматичних тіл складної форми. Урахування змінності компонент метричного тензору в поперечному перерізі призматичного СЕ дозволяє зменшити обмеження на співвідношення розмірів сторін і косокутність поперечного перерізу СЕ, що, в свою чергу, дозволить зменшити кількість невідомих в дискретних моделях НМСЕ.

Алгоритм розв'язання просторових задач термов'язкопружнопластичності. Розв'язання просторових задач термов'язкопружно-пластичності потребує застосування ефективних алгоритмів, які орієнтовані на моделювання тривалих за часом процесів деформування матеріалу, є інваріантними щодо використовуваних форм рівнянь повзучості та надають можливість урахування змін фізико-механічних властивостей матеріалу залежно від параметрів напружено-деформованого стану і температури.

Процес нелінійного деформування може бути поданий у вигляді сукупності дискретних кроків за параметрами зовнішнього навантаження і часом. Таким чином, для розв'язання задачі необхідним є використання покрокового алгоритму. В свою чергу, на кожному кроці для розв'язання систем нелінійних рівнянь МСЕ використовуються ітераційні алгоритми.

Вибір величини кроку за параметром (Δt за часом і Δp за навантаженням) здійснюється за умови дотримання умов збіжності, як ітераційного процесу розв'язання систем нелінійних рівнянь, так і отримуваних результатів. При цьому значення Δt і Δp суттєво залежать від механічних характеристик матеріалу (параметрів кривих пружнопластичного деформування і повзучості) та характеру змінення зовнішнього навантаження. Правильний вибір кроку за часом і навантаженням суттєво впливає на точність отримуваних результатів, тому проведення відповідних досліджень збіжності є важливим етапом розв'язання задачі.

Для урахування змін фізико-механічних властивостей матеріалу залежно від температури і зовнішнього навантаження на початку кожного кроку розв'язання задачі передбачено можливість їх коригування. В межах кроку фізико-механічні характеристики передбачаються незмінними.

На кожній ітерації n кроку m вектор невідомих переміщень $\{u\}_n^m$ системи нелінійних рівнянь МСЕ подається у вигляді

$$\{u\}_n^m = \{u\}_{n-1}^m + \{\Delta u\}_n^m = \{u\}_{n-1}^m + [K]^{-1}\left(\{Q\}^m - \{R\}_n^m\right), \tag{47}$$

де $\{Q\}^m$ – вектор вузлових навантажень на кроці m;

$\{R\}_n^m$ – вектор вузлових реакцій на ітерації n, обчислений за величинами напружень σ_{ij}, змінення яких відбуваються внаслідок прирощення зовнішнього навантаження або часу і відповідного нелінійного деформування матеріалу.

Формула (47) описує ітераційний алгоритм для розв'язання систем нелінійних рівнянь МСЕ. Умовою збіжності ітераційного процесу на кроці є нерівність

$$\left(\{Q\}^m - \{R\}_n^m\right) \le \zeta \left\|\{Q\}^m\right\|, \tag{48}$$

де $\xi = 10^{-4}\ldots10^{-6}$ – параметр точності розв'язання системи нелінійних рівнянь, який може бути визначений на основі дослідження збіжності отримуваного розв'язку.

При використанні НМСЕ та відповідному поданні переміщень і зовнішніх навантажень у вигляді розкладу за системою базисних функцій Ψ^l

$$u_{k'} = \sum_{l=0}^{L} U_{k'l}\,\Psi^{(l)}\ ; \quad \{Q_l\}^m = \int_{-1}^{1} Q_m \Psi^l \sqrt{\overset{\circ}{g}}\ dx^3\ , \tag{49}$$

вектори $\{u\}_n^m$, $\{Q\}^m$, $\{R\}_n^m$ і матриця жорсткості $[K]$ набувають блочної структури

$$\{u\}_n^m = \begin{Bmatrix} \{u_1\}_n^m \\ \ldots \\ \{u_l\}_n^m \\ \ldots \\ \{u_L\}_n^m \end{Bmatrix}, \quad \{Q\}^m = \begin{Bmatrix} \{Q_1\}^m \\ \ldots \\ \{Q_l\}^m \\ \ldots \\ \{Q_L\}^m \end{Bmatrix}. \quad \{R\}_n^m = \begin{Bmatrix} \{R_1\}_n^m \\ \ldots \\ \{R_l\}_n^m \\ \ldots \\ \{R_L\}_n^m \end{Bmatrix}; \tag{50}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{11}] & \ldots & [K_{1l}] & \ldots & [K_{1L}] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ [K_{l1}] & \ldots & [K_{ll}] & \ldots & [K_{lL}] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ [K_{L1}] & \ldots & [K_{Ll}] & \ldots & [K_{LL}] \end{bmatrix}. \tag{51}$$

Зважаючи на зазначену особливість матриці жорсткості, для розв'язання отриманої системи рівнянь раціональним є використання блочно-ітераційних алгоритмів [1].

На кожній ітерації n розв'язання нелінійної задачі за алгоритмом (47) проводиться внутрішній ітераційний процес розв'язання лінійної задачі. Тому з

урахуванням виразів (49)-(51), для розв'язання лінійної задачі застосовують алгоритм

$$\{u_l\}_{nk}^m = \{u_l\}_{nk-1}^m + \beta\left[K_{ll}\right]^{-1}\left(\{P_l\}_n^m - \{S_l\}_{nk-1}^m\right), \tag{52}$$

де β – параметр релаксації, $1 < \beta < 2$;

$\{P_l\}_n^m = \left(\{Q_l\}^m - \{R_l\}_n^m\right)$ – вектор навантаження на ітерації *n* кроку *m*, отриманий за величинами дійсних значень напружень, обчислених з урахуванням наявності нелінійних деформацій;

$\{S_l\}_{nk}^m = \sum_{l=0}^{l^*-1}\left[K_{ln}\right]\{u_l\}_{nk+1}^m + \sum_{l=l^*}^{L}\left[K_{ln}\right]\{u_l\}_{nk}^m$ – вектор непогодженості, який, внаслідок недіагональної структури матриці $\left[K_{ln}\right]$, враховує неточність отримуваного на ітерації k розв'язку системи лінійних рівнянь.

Умовою збіжності ітераційного процесу на кроці є нерівність

$$\sum_{l=0}^{L}\left(\{\Delta u\}_l^n\right)^2 \le \zeta\sum_{l=0}^{L}\left(\{u\}_l^n\right)^2 . \tag{53}$$

Таким чином, запропонований алгоритм передбачає реалізацію двох ітераційних циклів: внутрішнього, пов'язаного з розв'язанням системи лінійних рівнянь на кожній ітерації нелінійного циклу, та зовнішнього, обумовленого розв'язанням саме системи нелінійних рівнянь. Загальна кількість ітерацій дорівнюватиме добутку кількості ітерацій цих двох циклів, що суттєво перевищує кількість ітерацій, необхідних для розв'язання нелінійної задачі за МСЕ.

Зменшити загальну кількість ітерацій дозволяє підхід, що ґрунтується на суміщенні внутрішнього ітераційного процесу розв'язання лінійної задачі й ітераційного процесу розв'язання нелінійної задачі. Тоді алгоритм (52) набуває вигляду [7]

$$\{u_l\}_{n+1}^m = \{u_l\}_n^m + \beta\left[K_{ll}\right]^{-1}\cdot\left(\{Q_l\}^m - \{R_l\}_n^m\right). \tag{54}$$

Матриця жорсткості $\left[K_{ll}\right]$ обчислюється за формулою (46), а при обчисленні вектора вузлових реакцій $\left[R_l\right]$, крім пружних деформацій, враховуються температурні деформації, деформації пластичності та повзучості.

Формула (54) описує метод блочних ітерацій із послідовною верхньою релаксацією для розв'язання систем нелінійних рівнянь, використання якого обмежене простим навантаженням в межах кроку *m*. Як свідчать наведені в роботі [1] результати розв'язання тестових прикладів, зазначений алгоритм дозволяє суттєво зменшити кількість ітерацій розв'язання нелінійної задачі на основі НМСЕ.

При реалізації даного алгоритму традиційно в якості першого наближення розв'язку на першій ітерації кроку m використовують розв'язок, що відповідає не завантаженому стану тіла ($\{u_l\}_1^m = 0$, $\{R_l\}_1^m = 0$). Але, при покроковому

розв'язанні задачі, зважаючи на необхідність виконання умов збіжності за кроками по навантаженню, відмінності розподілу параметрів напружено-деформованого стану при відносно невеликому співвідношенні прирощення навантаження до його абсолютних значень є несуттєвими. Тому для підвищення ефективності запропонованого алгоритму та, відповідно, зменшення обсягу обчислювальних витрат, було реалізовано підхід, що базується на застосуванні екстраполяції переміщень $\{\hat{u}_l\}_1^m$ за їх величинами, отриманими на попередньому кроці $\{u_l\}^{m-1}$ та відношенням величин навантаження даного $\{Q_l\}^m$ та попереднього $\{Q_l\}^{m-1}$ кроків

$$\{\hat{u}_l\}_1^m = \{u_l\}^{m-1} \frac{\{Q_l\}^m}{\{Q_l\}^{m-1}}. \tag{55}$$

За величиною отриманих переміщень обчислюються вузлові реакції $\{R_l\}_1^m$, які в подальшому використовуються в ітераційному процесі.

Визначення напружень при температурному навантаженні. В загальному випадку на кожному кроці розв'язання задачі на першому етапі проводиться визначення напружено-деформованого стану при термопружному деформуванні.

Для ізотропного матеріалу температурні складові компонент тензора деформацій визначаються за формулою (5). Розклавши температурні деформації в ряд Маклорена відповідно з аналогією при обчисленні повних деформацій (20) та здійснивши необхідні підстановки відповідно (27)-(29) отримаємо вираз для обчислення компонент температурних деформацій

$$\overset{\circ}{\varepsilon}{}^T_{\alpha(\alpha)} = \frac{\overset{\circ}{\alpha}_T}{4} \sum_{S_1=\pm1} \sum_{S_2=\pm1} \Delta T_{(S_1S_2)} \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}; \quad \overset{\circ}{\varepsilon}{}^T_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} = \frac{\overset{\circ}{\alpha}_T}{4} \sum_{S_1=\pm1} \sum_{S_2=\pm1} \Delta T_{(S_1S_2)} 2S_{(3-\alpha)} \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)};$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}{}^T_{12} = \frac{\overset{\circ}{\alpha}_T}{4} \sum_{S_1=\pm1} \sum_{S_2=\pm1} \Delta T_{(S_1S_2)} \overset{\circ}{g}_{12}; \quad \overset{\circ}{\varepsilon}{}^T_{33} = \frac{\overset{\circ}{\alpha}_T}{4} \sum_{S_1=\pm1} \sum_{S_2=\pm1} \Delta T_{(S_1S_2)} \overset{\circ}{g}_{33}; \tag{56}$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}{}^T_{33,\beta} = \frac{\overset{\circ}{\alpha}_T}{4} \sum_{S_1=\pm1} \sum_{S_2=\pm1} \Delta T_{(S_1S_2)} \overset{\circ}{g}_{33} 2S_\beta.$$

Співвідношення, що описують залежність між коефіцієнтами розкладу деформацій у ряд Маклорена і температурою, у матричній формі мають наступний вигляд

$$\left\{\overset{\circ}{\varepsilon}{}^T\right\} = \left[\overset{\circ}{B}{}^T\right]\{T\}, \quad \left\{\overset{\circ}{\varepsilon}{}^T_{,\alpha}\right\} = \left[\overset{\circ}{B}{}^T_{,\alpha}\right]\{T\}, \tag{57}$$

де $\{T\}^T = \left\{T_{(-1;-1)} T_{(1;-1)} T_{(-1;1)} T_{(1;1)}\right\}$;

структура векторів $\left\{\overset{\circ}{\varepsilon}{}^T\right\}$ та $\left\{\overset{\circ}{\varepsilon}{}^T_{,\alpha}\right\}$ є аналогічною до (36), а матриць $\left[\overset{\circ}{B}{}^T\right]$ та $\left[\overset{\circ}{B}{}^T_{,\alpha}\right]$ – до (38).

Значення компонент підматриць температурних деформацій $\left[\overset{\circ}{B}^{T}\right]^{(S_1,S_2)}$, $\left[\overset{\circ}{B}^{T}_{,\alpha}\right]^{(S_1,S_2)}$ визначаються відповідно до формул (56)

$$\left[\overset{\circ}{B}^{T}\right]^{(S_1,S_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{g}_{11} \\ \frac{1}{2}\overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{g}_{12} \\ \frac{1}{4}\overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{g}_{22} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4}\overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{g}_{33} \end{bmatrix}; \quad \left[\overset{\circ}{B}^{T}_{,\alpha}\right]^{(S_1,S_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\overset{\circ}{\alpha}_T S_{(3-\alpha)} \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\overset{\circ}{\alpha}_T S_{\alpha} \overset{\circ}{g}_{33} \end{bmatrix}. \tag{58}$$

Коефіцієнти розкладу прирощень напружень визначаються за величинами повних і температурних деформацій

$$\left\{\overset{\circ}{\sigma}\right\} = \left[\overset{\circ}{D}\right]\left(\left\{\overset{\circ}{\varepsilon}\right\} - \left\{\overset{\circ}{\varepsilon}^{T}\right\}\right), \ \left\{\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}\right\} = \left[\overset{\circ}{D}_{\alpha}\right]\left(\left\{\overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha}\right\} - \left\{\overset{\circ}{\varepsilon}^{T}_{,\alpha}\right\}\right). \tag{59}$$

Обчислення напружень при наявності деформацій пластичності та повзучості. На кожній ітерації n кроку m розв'язання системи нелінійних рівнянь здійснюється із використанням алгоритму (54) [1]. Отримані напруження перевіряються за умовою наявності пластичного деформування $\tau > \tau_s$, де τ_s – поточне значення межі текучості. При виконанні цієї умови у відповідних точках конструкції проводиться визначення напружено-деформованого стану, яке пов'язане із прирощенням миттєвих деформацій пластичності. Після цього з урахуванням прирощення часу на кроці проводиться визначення напружено-деформованого стану з урахуванням перебігу процесу повзучості.

На початку кожної ітерації *n* кроку *m* компоненти тензора напружень σ_{ij} обчислюються за формулою

$$\left(\sigma_{ij}\right)_n = \left(\sigma_{ij}\right)_{n-1} + \left(\Delta\sigma_{ij}\right)_n, \tag{60}$$

де $\left(\Delta\sigma_{ij}\right)_n$ – прирощення напружень, які визначаються згідно з законом Гука за величиною прирощення деформацій, обчислених згідно (59).

Дійсні значення напружень $\left(\overline{\sigma_{ij}}\right)_n^m$, що використовуються для визначення компонент вектора вузлових реакцій $\{R\}_n^m$, обчислюються за формулою

$$\left(\overline{\sigma_{ij}}\right)_n^m = \frac{1}{3}\delta^{ij}\left(\sigma_{ij}\right)_n^m + \left(\overline{s^{ij}}\right)_n^m = \left(\sigma_o\right)_n^m + \left(\overline{s^{ij}}\right)_n^m, \tag{61}$$

де $\left(\overline{s^{ij}}\right)_n^m$ – компоненти девіатора напружень, що враховують прирощення нелінійних деформацій пластичності або повзучості.

Визначення компонент девіатора $\left(\overline{s^{ij}}\right)_n^m$ дійсних напружень, що входять до формули (61), при наявності деформацій пластичності, здійснюється з урахуванням поточних значень межі текучості τ_s [13]

$$\left(\overline{s^{ij}}\right)_n^m = \left(s^{ij}\right)_n^m \frac{\tau_s}{\tau}, \tag{62}$$

де $\tau = \sqrt{s_{ij}s^{ij}/2}$ – поточне значення інтенсивності дотичних напружень.

Напруження, отримані за формулами (60) – (62), використовуються для подальшого обчислення вектора вузлових реакцій і перевіряються за умовою (53), в разі виконання якої ітераційний процес визначення миттєвих деформацій пластичності припиняється. Далі проводиться обчислення дійсних значень прирощень деформацій пластичності $\left(\Delta\varepsilon_{ij}^{\eth}\right)_m$

$$\left(\varepsilon_{ij}^p\right)_m = \left(\varepsilon_{ij}^p\right)_{m-1} + \left(\Delta\varepsilon_{ij}^p\right)_m = \left(\varepsilon_{ij}^p\right)_{m-1} + \left(1 - \frac{\tau_s}{\tau_i}\right)\left(\overline{s_{ij}}\right)_m / G_1 . \tag{63}$$

де $G_1 = E/(1-2\nu)$.

При наявності деформацій повзучості на початку кожної ітерації *n* кроку *m* компоненти тензора напружень σ_{ij} обчислюються за формулою

$$\left(\overline{s^{ij}}\right)_n^m = \left(s^{ij}\right)_n^m - G_1\left(\Delta\varepsilon_{ij}^c\right)_n^m, \quad \left(\Delta\varepsilon_{ij}^c\right)_n^m = \left(\xi_{ij}^c\right)_n^m \Delta t_m , \tag{64}$$

де $\left(\xi_{ij}^c\right)_n^m = \frac{3}{2}\left[\xi_i^c\right]_m^n \frac{\left(s_{ij}\right)_n^m}{\left(\sigma_i\right)_m^n}$; $\xi_i^c = \frac{d\varepsilon_i^c}{dt} = \xi_i^c\left(\sigma_i, \nu_{\tilde{n}}, \mathrm{T}, \omega\right)$;

Δt_m – величина кроку за часом.

Аналогічно до випадку деформацій пластичності, отримані за формулами (60), (61), (64) напруження перевіряються за умовою (53), після виконання якої проводиться обчислення прирощень деформацій повзучості $\left(\Delta\varepsilon_{ij}^c\right)_m$ і пошкодженості $\left(\Delta\omega\right)_m$ із використанням напружень, отриманих на останній ітерації кроку та відповідно накопичених величин $\left(\varepsilon_{ij}^c\right)_m$ і ω_m

$$\left(\varepsilon_{ij}^c\right)_m = \left(\varepsilon_{ij}^c\right)_{m-1} + \left(\Delta\varepsilon_{ij}^c\right)_m = \left(\varepsilon_{ij}^c\right)_{m-1} + \left(\xi_{ij}^c\right)_m \Delta t_m . \tag{65}$$

$$\omega_m = \omega_{m-1} + (\Delta\omega)_m = \omega_{m-1} + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_m \Delta t_m .$$

Формули (60), (61), (63)–(65) є інваріантними щодо конкретизованого вигляду виразів ξ_i^c і $\frac{d\omega}{dt}$.

У кінці кожного кроку для всіх точок тіла здійснюється перевірка умови локальної втрати несучої здатності матеріалу

$$\omega > \omega^*, \qquad (66)$$

де ω^* – критичне значення параметра пошкодженості, що відповідає моменту руйнування матеріалу.

Теоретично $\omega^* = 1$ [8], але при чисельному розв'язанні задач для ξ_i^c і $d\omega/dt$ приймається $\omega^* < 1$ ($\omega^* = 0{,}9\text{-}0{,}99$ [1]).

Момент часу t^*, коли хоч в одному із СЕ задовільняється умова (66), фіксується як момент переходу від процесу накопичення пор і несуцільностей у матеріалі, що враховуються інтегрально за допомогою параметра пошкодженості, до процесу зародження макроскопічних дефектів. Моделювання їхнього розвитку до утворення початкових тріщин може бути продовжено на основі співвідношень континуальної механіки руйнування [1].

Ефективність і вірогідність розв'язання задач термо–в'язко–пружно–пластичності. З метою доведення необхідності використання розроблених косокутних призматичних скінченних елементів, що враховують змінність компонент метричного тензору в площині поперечного перерізу СЕ при розрахунку задач термопружності було розглянуто тестовий приклад про двобічне розширення паралелепіпеду розмірами 20×20×10 мм в умовах плоскої деформації в напрямку $z^{3'}$. Розрахунок для 1/4 тіла виконаний за допомогою МСЕ і НМСЕ. Використані дискретні моделі – з ортогональною (регулярною) та неортогональною сітками СЕ наведені на рис. 2, а і рис. 2, б відповідно. Вихідні дані: температура рівномірного нагріву $T = 100$ °С, коефіцієнт лінійного температурного розширення $\alpha = 1 \cdot 10^{-4}$ 1/град, модуль пружності $E = 0{,}1$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0{,}3$.

Розрахунки показали, що для ортогональної сітки результати отримані на основі НМСЕ повністю співпали з результатами МСЕ.

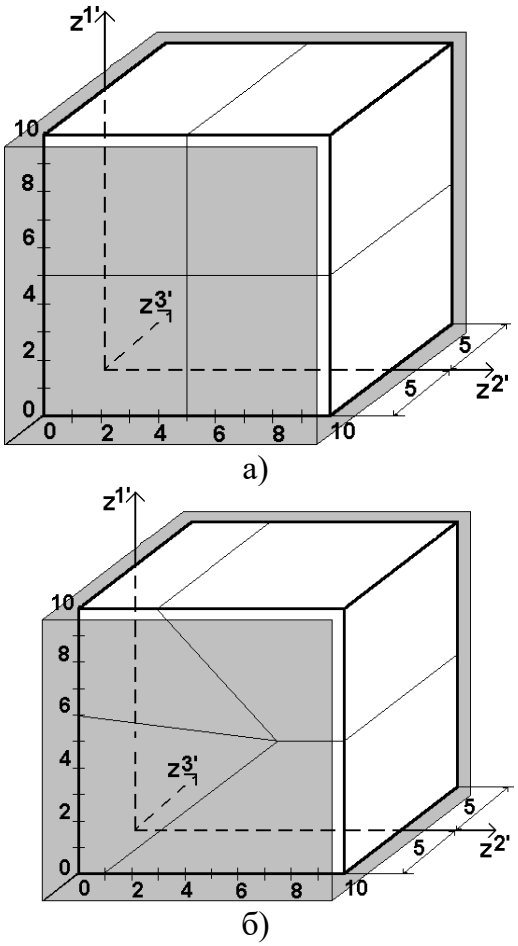

Рис. 2 – Дискретні моделі з ортогональною (а) та неортогональною (б) сітками СЕ

Як видно (табл. 1), використання в неортогональній сітці косокутних СЕ, що не враховують змінності компонент метричного тензора в площині поперечного перерізу (g_{ij} = const) суттєво відрізняються від отриманих для ортогональної сітки, а отримання вірогідних результатів забезпечується лише врахуванням змінності компонент метричного тензора ($g_{ij} = f(x^i)$) в площині поперечного перерізу СЕ.

Таблиця 1 – Результати розрахунку для не ортогональної сітки

Координати точки		$z^{1'}$=10 $z^{2'}$=0	$z^{1'}$=0 $z^{2'}$=10	$z^{1'}$=10 $z^{2'}$=10
МСЕ, $g_{ij} = f(x^i)$		$u_{1'}$=13 $u_{2'}$=0	$u_{1'}$=0 $u_{2'}$=13	$u_{1'}$=13 $u_{2'}$=13
НМСЕ	g_{ij} = const	$u_{1'}$=12 $u_{2'}$=0	$u_{1'}$=0 $u_{2'}$=5.91	$u_{1'}$=10.24 $u_{2'}$=5.91
	$g_{ij} = f(x^i)$	$u_{1'}$=13 $u_{2'}$=0	$u_{1'}$=0 $u_{2'}$=13	$u_{1'}$=13 $u_{2'}$=13

Для дослідження ефективності викладеного алгоритму (53-55) і вірогідності отримуваних результатів при наявності деформацій пластичності розглянуто тестовий приклад про деформування нескінченної товстостінної труби (рис. 3) від впливом внутрішнього тиску, який змінюється від 0 до $p_{\max}$ = 0,07 МН/м^2, характеристики матеріалу: E = 1 МПа, ν = 0,3. Дискретна модель фрагмента труби отримана із використанням косокутних призматичних СЕ.

При збільшенні навантаження від 0 до $p_{\max}$ = 0,07 МН/м^2 зона пластичних деформацій поступово розповсюджується від внутрішньої поверхні на всю товщину стінку труби.

Розв’язання даного тестового прикладу засвідчило, що кількість ітерацій розв’язання задачі НМСЕ із застосуванням алгоритму з екстраполяцією переміщень дозволяє скоротити обчислювальні витрати більше ніж в два рази (табл. 2). При цьому зберігається достатньо висока точність отриманих результатів (похибка менше 2 %) порівняно з еталонним розв’язком, отриманим в роботі [12].

Висновки. В даній роботі викладена методика розв’язання просторових задач термов’язкопружнопластичності призматичних тіл на основі напіваналітичного методу скінчених елементів. Отримані вирази матриці жорсткості (46) і вектору вузлових реакцій (41) неоднорідного косокутного призматичного СЕ з довільними граничними умовами. Ефективність його застосування доведена на тестовому прикладі про двобічне розширення паралелепіпеду в умовах плоскої деформації.

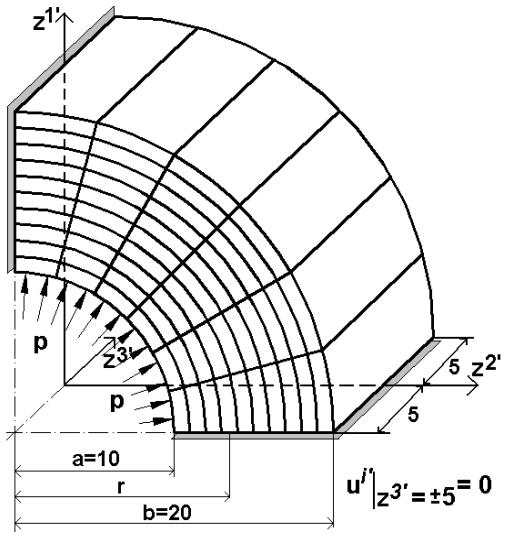

Рис. 3 – Дискретна модель НМСЕ для товстостінної труби

Описаний покроковий алгоритм розв'язання просторової задачі термов'язкопружнопластичності призматичних тіл. Відмінність пропонованого алгоритму полягає у використанні екстраполяції переміщень поточного кроку на основі відомих величин переміщень попереднього кроку та даних про зміну параметрів зовнішнього навантаження. Отримані вирази для визначення величин температурних деформацій та обчислення напружень за наявності деформацій пластичності та повзучості. Застосування алгоритму з екстраполяцією переміщень дозволяє зменшити обсяг обчислювальних витрат 1,5-3 рази в залежності від розглядуваної задачі, що доведено на тестовому прикладі.

Таблиця 2 – Порівняння результатів розрахунку

P, МН/м^2	Еталон	Алгоритм без екстраполяції переміщень		Алгоритм з екстраполяцією переміщень (55)	
	Величина кільцевого напруження $\sigma_{\theta'\theta'}$ і загальна кількість ітерацій N				
	$\sigma_{\theta'\theta'}$, МПа	$\sigma_{\theta'\theta'}$, МПа	N	$\sigma_{\theta'\theta'}$, МПа	N
0.037	0.0571	0.0575	9	0.0575	9
0.051	0.0541	0.0531	16	0.0535	14
0.059	0.0462	0.0456	36	0.0453	23
0.064	0.0412	0.0409	73	0.0404	35
0.070	0.0374	0.0370	125	0.0367	57

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл: Монографія / Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С. – К.: КНУБА, 2005. – 298 с.
2. Матриця жорсткості і вектор вузлових реакцій скінченного елемента для розв'язання просторових задач термов'язкопружнопластичності НМСЕ / Баженов В.А., Пискунов С.О., Солодей І.І., Андрієвський В.П., Сизевич Б.І. // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. – К.: КНУБА, 2005. – Вип. 76. – С. 3-26.
3. Блох В.И. Теория упругости. – Харьков: Изд-во ХГУ, 1964. – 483 с.
4. Голуб В.П. Нелинейная механика континуальной поврежденности и ее приложение к задачам ползучести и усталости // Прикладная механика. – 2000. – № 3. – С. 31-66.
5. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. – М.: Физматгиз, 1960. – 456 с.
6. Качанов Л.М. Теория ползучести. – М.: Физматгиз, 1969. – 420 с.
7. Пискунов С.О. Ефективність ітераційних алгоритмів розв'язання задач в'язкопружнопластичності в межах напіваналітичного методу скінченних елементів // Науковий вісник Національного технічного університету України «КПІ». – К.: КПІ, 2005. – Вип. 46.
8. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 732 с.
9. Сахаров А.С., Кислоокий В.Н., Киричевский В.В. Метод конечных элементов в механике твердых тел. – К.: Вища школа, 1982. – 480 с.
10. Сахаров А.С. Моментная схема конечных элементов МСКЭ с учётом жестких смещений // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1974. – Вып. 24. – С. 147-156.
11. Вимушені коливання баштової градирні АЕС під дією вітрового навантаження / Сніжко Н.А., Солодей І.І., Овсянніков О.С., Шевченко Ю.В. // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. – К.: КНУБА, 2004. – Вип. 74. – С. 92-103.
12. Соколовский В.Н. Теория пластичности. – М.: Высш. шк., 1969.– 214 с.
13. Уилкинс М.Л. Расчет упруго-пластических течений // Вычислительные методы в гидротехнике. – М.: Мир, 1967. – С. 212-263.