

## АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ИНКРЕМЕНТАЛЬНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Рассмотрено численное решение нелинейных задач механики деформируемого твердого тела с применением инкрементальной теории упругости. На основе метода конечных элементов разработан итерационный алгоритм. Приведены результаты расчетов конструкций из изотропных и анизотропных материалов.

### DECISIONS OF NONLINEAR TASKS OF INCRIMENTAL THEORY OF RESILIENCY BY FINITE ELEMENTS METHODS

The numeral decision of nonlinear tasks of mechanics of the deformed solid is considered with the use of incremental theory of resiliency. On the basis of finite elements method an iteration algorithm is developed. The results of calculations of constructions from isotropic and anisotropic of materials are presented.

**Введение.** При моделировании напряженно-деформированного ряда конструкций из композитов или эластомеров необходимо учитывать, что материал испытывает большие деформации и перемещения.

Поведение упруговязких материалов нельзя описать, не учитывая его связи с протеканием во времени предшествующего деформирования. Не требуется и знания последовательности, в которой материал подвергался деформированию, – исключено изучение пластичности. Речь идет только о материалах, полностью лишенных «памяти», не возникает вопроса об их предыстории. Такими свойствами наделяется упругий материал.

В твердом теле существуют преимущественные состояния, из которых всякое изменение формы (деформирование) влияет на поведение материала при нагружении, а также на свойства конструкции. Появление начальных напряжений в процессе деформирования предполагает применение инкрементальной теории. Поэтому существует лишь ограниченный класс задач теории упругости, для которых получены аналитические решения.

Инкрементальная теория [2] основана на подходе Лагранжа, в которой используются тензоры напряжений Пиолы-Кирхгофа и тензоры деформаций Грина.

Целью настоящей работы является разработка численного алгоритма решения нелинейных прикладных задач упругости с применением инкрементальной теории.

**Постановка задачи.** Рассмотрим задачу о деформировании твердого тела с геометрическими и физическими нелинейностями. Геометрическая нелинейность означает, что перемещения столь велики, что теория упругости при малых перемещениях уже неприменима, а физическая нелинейность означает, что поведение материала более не ограничивается упругими деформациями. Для математического описания этой задачи применяется инкрементальная теория.

Формулировка инкрементальной теории начинается с представления пути деформирования в виде последовательности равновесных состояний

$$T^{(0)}, T^{(1)}, \dots, T^{(n)}, T^{(n+1)}, \dots, T^{(f)},$$

где  $T^{(0)}$  и  $T^{(f)}$  – начальное и конечное состояния деформирования соответственно;

$T^{(n)}$  – произвольное промежуточное состояние.

Считается, что все переменные состояния, такие, как напряжения, деформации и перемещения, известны на протяжении всей истории деформирования вплоть до состояния  $T^{(n)}$ . Задача состоит в том, чтобы получить уравнения инкрементальной теории для определения переменных состояния в состоянии  $T^{(n+1)}$  в предположении, что состояние  $T^{(n+1)}$  бесконечно близко к состоянию  $T^{(n)}$  и все определяющие уравнения можно линеаризовать по отношению к приращению переменных состояния.

Пусть положения произвольной материальной точки тела в состояниях  $T^{(0)}$ ,  $T^{(n)}$  и  $T^{(n+1)}$  обозначены  $P^{(0)}$ ,  $P^{(n)}$  и  $P^{(n+1)}$ , соответственно, радиусы векторы этих точек равны  $\vec{r}^{(0)}$ ,  $\vec{r}^{(n)}$  и  $\vec{r}^{(n+1)}$  (рис. 1). Тело отнесено к базисной декартовой системе координат  $Z_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

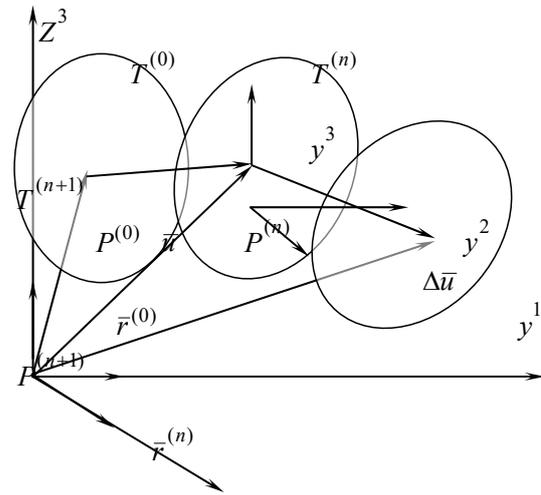


Рис. 1 – Состояния  $T^{(0)}$ ,  $T^{(n)}$  и  $T^{(n+1)}$

Радиус-векторы точек будут равны:

$$\begin{aligned} \vec{r}^{(0)} &= Z_i \cdot \vec{i}_i; & \vec{r}^{(n)} &= Z_i \vec{i}_i = \vec{r}^{(0)} + \vec{u} = (z_i + u_i) \vec{i}_i, \\ \vec{r}^{(n+1)} &= y_i \vec{i}_i = \vec{r}^{(0)} + \vec{u} + \Delta \vec{u} = (Z_i + \Delta u_i) \vec{i}_i = (z_i + u_i + \Delta u_i) \vec{i}_i, \end{aligned}$$

где  $\vec{i}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – базисные векторы прямоугольной декартовой системы координат;

$\vec{u}$  и  $\vec{u} + \Delta \vec{u}$ ,  $u_i$  и  $u_i + \Delta u_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – векторы перемещений и их компоненты в состояниях  $T^{(n)}$  и  $T^{(n+1)}$  соответственно.

Уравнения линейной теории упругости в перемещениях получаются после замены тензора напряжений его представлением через линейный тензор деформации, а последнего – выражением через вектор перемещения. В нелинейной теории дело осложняется возможностями определения напряженного состояния несколькими тензорами (Коши, Пиола) и множественностью их представлений через меры деформации (Коши-Грина, Фингера, Альманзи) или градиент места.

Для построения алгоритма численной реализации инкрементальной теории будем использовать обобщенный закон Гука для композитного материала

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}. \tag{1}$$

Начнем с определения напряжений, деформаций, перемещений, массовых  $q_i + \Delta q_i$  и поверхностных  $p_i + \Delta p_i$  сил, действующих на поверхности  $S_\sigma$ , и заданных на поверхности  $S_u$  перемещений в произвольных промежуточных состояниях

ях  $T^{(n)}$  и  $T^{(n+1)}$ . Напряжения и внешние силы на  $S_\sigma$  отнесены к единичной площади в начальном состоянии  $T^{(0)}$ , а массовые силы – к единичному объему  $V$  в том же состоянии.

Принцип виртуальной работы в состоянии  $T^{(n+1)}$  запишется в виде [2]:

$$\iiint_V \left[ (\sigma_{ij} + \Delta\sigma_{ij}) \delta(\varepsilon_{ij} + \Delta\varepsilon_{ij}) - (q_i + \Delta q_i) \delta\Delta\tilde{u}_i \right] dV - \iint_{S_\sigma} (p_i + \Delta p_i) \delta\Delta\tilde{u}_i dS = 0, \quad (2)$$

где  $\Delta\tilde{u}_i = \Delta\bar{u}_i$  на  $S_u$ ;

тензор конечных деформаций  $\varepsilon_{ij} + \Delta\varepsilon_{ij}$  в базисной системе координат дается уравнением

$$\varepsilon_{ij} + \Delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[ (\tilde{u}_i + \Delta\tilde{u}_i)_{,j} + (\tilde{u}_j + \Delta\tilde{u}_j)_{,i} + (\tilde{u}_k + \Delta\tilde{u}_k)_{,i} (\tilde{u}_k + \Delta\tilde{u}_k)_{,j} \right]. \quad (3)$$

и варьируется величинами  $\Delta\tilde{u}_i$ .

Компоненты тензора деформаций можно разложить на сумму линейной ( $l$ ) и нелинейной ( $n$ ) составляющих

$$\varepsilon_{ij} + \Delta\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(\varepsilon)} + \Delta\varepsilon_{ij}^{(\varepsilon)} + \varepsilon_{ij}^{(i)} + \Delta\varepsilon_{ij}^{(i)}, \quad (4)$$

где  $\varepsilon_{ij}^{(\varepsilon)} + \Delta\varepsilon_{ij}^{(\varepsilon)} = \frac{1}{2} (c_i^m \tilde{u}_{m,j} + c_j^m \tilde{u}_{m,i}) + \frac{1}{2} (c_i^m \Delta\tilde{u}_{m,j} + c_j^m \Delta\tilde{u}_{m,i})$ ;

$$\varepsilon_{ij}^{(i)} + \Delta\varepsilon_{ij}^{(i)} = \frac{1}{2} \tilde{u}_{m,i} \tilde{u}_j^m + \frac{1}{2} (\Delta\tilde{u}_{m,i} \Delta\tilde{u}_j^m + \Delta\tilde{u}_{m,i} \tilde{u}_j^m + \tilde{u}_{m,i} \Delta\tilde{u}_j^m).$$

Запишем принцип виртуальной работы в состоянии  $T^{(n+1)}$ :

$$\iiint_V \left[ (\sigma_{ij}^{(\varepsilon)} + \sigma_{ij}^{(i)} + \Delta\sigma_{ij}^{(\varepsilon)} + \Delta\sigma_{ij}^{(i)}) \delta(\varepsilon_{ij}^{(\varepsilon)} + \Delta\varepsilon_{ij}^{(\varepsilon)} + \varepsilon_{ij}^{(i)} + \Delta\varepsilon_{ij}^{(i)}) - (\bar{q}^i + \Delta\bar{q}^i) \delta\Delta\tilde{u}_i \right] dV - \iint_{S_\sigma} (\bar{p}^i + \Delta\bar{p}^i) \delta\Delta\tilde{u}_i dS = 0. \quad (5)$$

Получаем

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left[ (\sigma_{ij}^{(\varepsilon)} + \sigma_{ij}^{(i)}) \delta\varepsilon_{ij}^{(\varepsilon)} + (\sigma_{ij}^{(\varepsilon)} + \sigma_{ij}^{(i)}) \delta\Delta\varepsilon_{ij}^{(\varepsilon)} + (\sigma_{ij}^{(\varepsilon)} + \sigma_{ij}^{(i)}) \delta\varepsilon_{ij}^{(i)} + \right. \\ & + (\sigma_{ij}^{(\varepsilon)} + \sigma_{ij}^{(i)}) \delta\Delta\varepsilon_{ij}^{(i)} + \Delta\sigma_{ij}^{(\varepsilon)} \delta\varepsilon_{ij}^{(\varepsilon)} + \Delta\sigma_{ij}^{(\varepsilon)} \delta\Delta\varepsilon_{ij}^{(\varepsilon)} + \Delta\sigma_{ij}^{(\varepsilon)} \delta\varepsilon_{ij}^{(i)} + \Delta\sigma_{ij}^{(\varepsilon)} \delta\Delta\varepsilon_{ij}^{(i)} + \\ & + \Delta\sigma_{ij}^{(i)} \delta\varepsilon_{ij}^{(\varepsilon)} + \Delta\sigma_{ij}^{(i)} \delta\Delta\varepsilon_{ij}^{(\varepsilon)} + \Delta\sigma_{ij}^{(i)} \delta\varepsilon_{ij}^{(i)} + \Delta\sigma_{ij}^{(i)} \delta\Delta\varepsilon_{ij}^{(i)} - \\ & \left. - (\bar{q}_i + \Delta\bar{q}_i) \delta\Delta\tilde{u}_i \right] dV - \iint_{S_\sigma} (\bar{p}_i + \Delta\bar{p}_i) \delta\Delta\tilde{u}_i dS = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрим конечноэлементную дискретизацию уравнения (6). Перемещение  $\Delta u_k$  по объему конечного элемента аппроксимируем в виде полинома:

$$\Delta u_k = \sum_{pqr}^{lmn} \omega_k^{(pqr)} \psi^{(pqr)}, \quad \left( \sum_{pqr}^{lmn} = \sum_{p=0}^l \sum_{q=0}^m \sum_{r=0}^n \right).$$

Или в матричном виде

$$\{\Delta u_k\} = \{\omega_k\}^T \{\psi\}, \quad (7)$$

где  $\omega_k$  – коэффициенты разложения;

$\psi^{(pqr)}$  – набор степенных функций вида

$$\psi^{(pqr)} = \frac{(x^1)^p}{p!} \frac{(x^2)^q}{q!} \frac{(x^3)^r}{r!}, \quad (p = 0, 1, \dots, l; q = 0, 1, \dots, m; r = 0, 1, \dots, n). \quad (8)$$

Связи между приращениями напряжений  $\Delta\sigma_{ij}$  и приращениями деформаций  $\Delta\varepsilon_{kl}$  записывается в виде

$$\Delta\sigma_{ij} = C^{ijkl} \Delta\varepsilon_{kl}. \quad (9)$$

Представим компоненты тензора деформаций  $\varepsilon_{ij}$  в виде ряда Маклорена с разложением в окрестности начала координат

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{s=0}^{l_{ij}} \sum_{t=0}^{m_{ij}} \sum_{g=0}^{n_{ij}} e_{ij}^{(stg)} \psi^{(stg)}, \quad (10)$$

Выражение (10) в матричной форме будет иметь вид

$$\{\varepsilon_{ij}\} = \{e_{ij}\}^T \{\psi_{(ij)}\}. \quad (11)$$

Введем матрицу  $[A]$ , которая устанавливает связь между функциями формы  $N_{(pqr)}$  и степенными функциями  $\psi^{(pqr)}$

$$[N] = [A] \{\psi\}. \quad (12)$$

Компонент перемещений  $\Delta\tilde{u}_i$  по объему КЭ можно представить через узловые перемещения  $\Delta u_i^{(pqr)}$

$$\Delta\tilde{u}_i = \sum_{pqr}^{lmn} N_{(pqr)} \Delta u_i^{(pqr)} \quad \text{или} \quad \{\Delta\tilde{u}_i\} = [N] \{\Delta u_i\}. \quad (13)$$

Таким образом, закон аппроксимации перемещений будет иметь вид

$$\{\Delta\tilde{u}_i\} = [A] \{\psi\} \{\Delta u_i\}. \quad (14)$$

Преобразуем (6) с учетом (1), (9), (11), (13), (14) и

$$\Delta\varepsilon_{ij}^{(\tilde{e})} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\Delta\tilde{u}_i}{\partial Z_j} + \frac{\partial\Delta\tilde{u}_j}{\partial Z_i} \right) = [A] \{\psi_{,j}\} \{\Delta u_i\}; \quad \varepsilon_{ij}^{(\tilde{e})} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial Z_j} + \frac{\partial\tilde{u}_j}{\partial Z_i} \right) = [A] \{\psi_{,j}\} \{u_i\};$$

$$\Delta\varepsilon_{ij}^{(i)} = \frac{\partial\Delta\tilde{u}_k}{\partial Z_j} \cdot \frac{\partial\Delta\tilde{u}_k}{\partial Z_i} = [A] \{\psi_{,i}\} \{\Delta u_k\} \cdot [A] \{\psi_{,j}\} \{\Delta u_k\};$$

$$\varepsilon_{ij}^{(i)} = \frac{\partial\tilde{u}_k}{\partial Z_j} \cdot \frac{\partial\tilde{u}_k}{\partial Z_i} = [A] \{\psi_{,i}\} \{u_k\} \cdot [A] \{\psi_{,j}\} \{u_k\}.$$

Теперь вклад произвольного конечного элемента в уравнение (6) можно выразить в виде:

$$\left\{ \left[ K_{(0)}^{st} + K_{(1)}^{st} + K_{(2)}^{st} \right] \Delta u_t + \tilde{N}^{st} (\Delta u_t) - \Delta \bar{P}^s - \Delta \bar{Q}^s \right\} \delta \Delta u_s = 0, \quad (15)$$

$$\text{где} \quad [K_{(0)}^{st}] = \iiint_V [A]^T [F_{ij}^s]^T \{\psi_{(ij)}\}^T [C^{ijkl}] \{\psi_{(kl)}\} [F_{kl}^t] [A] dV;$$

$$\begin{aligned}
 [K_{(1)}^{st}] &= \iiint_V \left( \{u_{i,p}\}^T [A]^T [D_{pj}^s]^T \{\psi_{(ij)}\}^T [C^{ijkl}] [D_{kl}^t] \{\psi_{(kl)}\} [A] + \right. \\
 &\quad + \{u_{k,r}\}^T [A]^T [D_{rl}^s]^T \{\psi_{(kl)}\}^T [C^{ijkl}] [D_{ij}^t] \{\psi_{(ij)}\} [A] + \\
 &\quad \left. + \{u_{i,p}\}^T [A]^T [D_{pj}^s]^T \{\psi_{(ij)}\}^T [C^{ijkl}] [D_{rl}^t] \{\psi_{(kl)}\} [A] \{u_{r,k}\} \right) dV; \\
 [K_{(2)}^{st}] &= \iiint_V [[A]^T \{\psi_{s,i}\}^T [\sigma^{ij}] \{\psi_{t,j}\} [A]] dV; \\
 \Delta \bar{P}^s &= \iiint_V \Delta \bar{q}^s [A] \{\psi\} dV + \iint_{s_\sigma} \Delta \bar{p}^s [A] \{\psi\} dS; \\
 \Delta \bar{Q}^s &= - \iiint_V [\sigma^{ij}] \left( [A]^T [D_{ij}^s]^T \{\psi_{(ij)}\}^T + [A]^T [D_{pj}^s]^T \{\psi_{(pj)}\}^T \{u_{p,i}\} \right) dV + \\
 &\quad + \iiint_V \bar{q}^s [A] \{\psi\} + \iint_{s_\sigma} \bar{p}^s [A] \{\psi\} dS.
 \end{aligned}$$

Здесь  $[D_{ij}^s]$  – матрица дифференцирования;  $[K^{(0)}]$  – физическая матрица жесткости;  $[K^{(1)}]$  и  $[K^{(2)}]$  – матрицы влияния начальных перемещений и напряжений;  $\{\tilde{N}(\Delta u)\}$  – оператор нелинейная добавок к матрице жесткости. Матрицу  $\{\Delta \bar{Q}\}$  можно назвать остаточной матрицей.

Методика построения матриц жесткости с применение инкрементальной теории рассмотрена в работе [5].

Вариационное уравнение (15) сводится к системе нелинейных алгебраических уравнений относительно приращений перемещений  $\{\Delta u_i\}$

$$\left[ K_{(0)}^{st} + K_{(1)}^{st} + K_{(2)}^{st} \right] \Delta u_i = -\tilde{N}^{st}(\Delta u_i) + \Delta \bar{P}^s + \Delta \bar{Q}^s. \quad (16)$$

Отметим, что инкрементальная теория учитывает такие особенности деформирования тела:

- матрица жесткости включает начальные усилия;
- нагрузка представляет собой ступенчатую функцию  $\bar{P}_{(n)}$ , изменяющуюся на величину  $\Delta \bar{P}$  на каждом шаге нагружения таким образом, чтобы задача оставалась линейной;
- на каждом шаге по нагрузке рассматривается новое положение узловых точек деформированной конструкции.

Эффективность применяемого алгоритма оценивается, в первую очередь, характеристиками сходимости и точности, а также количеством затраченного времени.

Для решения нелинейной системы используем модифицированный метод Ньютона-Канторовича в сочетании с методом последовательных нагружений.

Система нелинейных уравнений (16) относительно компонент вектора перемещений  $\{u_{(1)}, u_{(2)}, \dots, u_{(n)}\}$  после конечно-элементной дискретизации с приме-

нением итерационных процедур сводится к нелинейному матричному уравнению вида:

$$\left[ \sum_{i=1}^{k-1} [K_{(i)}^*] + [K_{(k)}] \right] \Delta \bar{u}_{(k)}^{(l)} = -\tilde{N}(\Delta \bar{u}_{(k)}^{(l-1)}) + \Delta \bar{P}_{(k)} + \Delta \bar{Q}_{(k)}, \quad (17)$$

где  $[K_{(i)}^*]$  – инкрементальная матрица, которая зависит от напряжений и перемещений предыдущего шага;

$[K]$  – оператор линейной части системы разрешающих уравнений;

$\Delta \bar{u}_{(k)}^{(l)}$  – вектор узловых перемещений;

$\tilde{N}(\Delta \bar{u}_{(k)}^{(l-1)})$  – оператор нелинейных добавок;

$\bar{P}_{(k)}$  – вектор нагрузок на  $k$ -ом шаге нагружения.

Рассмотрим итерационный алгоритм решения задачи инкрементальной теории упругости.

Процесс нагружение конструкции разбиваем на  $k$  шагов  $\bar{P}_{(k)} = \Delta \bar{P}_{(1)} + \Delta \bar{P}_{(2)} + \dots + \Delta \bar{P}_{(k)}$ . На первом шаге нагружения рассматриваем не деформированное состояние. Координаты начального состояния  $x_0$ , начальное перемещение  $\bar{u}_{(0)} = 0$ , начальный оператор нелинейных добавок  $\tilde{N}(\bar{u}_{(0)}) = 0$ , инкрементальная матрица  $[K_{(1)}^*(x_0, \bar{u}_{(0)})] = 0$ .

На произвольном  $k$ -ом шаге нагружения итерационный алгоритм предусматривает следующие операции:

1. Решение задачи определяется из системы (17). В качестве начального приближения принимаются значения перемещений предыдущего шага  $\Delta \bar{u}_{(k)}^{(0)} = \Delta \bar{u}_{(k-1)}^{(l)}$ .

2. Вычисляется невязка  $\Delta \bar{R}_{(k)}^{(l)} = -\tilde{N}(\bar{u}_{(k)}^{(l-1)}) + \Delta \bar{P}_{(k)} + \Delta \bar{Q}_{(k)}$  и из решения системы уравнений  $\left[ \sum_{i=1}^{k-1} [K_{(i)}^*] + [K_{(k)}] \right] \Delta \bar{u}_{(k)}^{(l+1)} = \Delta \bar{R}_{(k)}^{(l)}$  находим добавку к перемещению  $\Delta \bar{u}_{(k)}^{(l+1)}$ .

3. Итерационный процесс на этом шаге продолжается до тех пор, пока с заданной степенью точности  $\varepsilon$  не выполняется условие равновесия, имеющее вид

$$\sum_{m=1}^M \{ \Delta \bar{R}_{(k)}^{(l)} \}_m^2 < \sum_{m=1}^M \{ \bar{P}_{(k)} \}_m^2 \cdot \varepsilon.$$

4. Далее изменяется нагрузка  $\bar{P}_{(k)} = \Delta \bar{P}_{(1)} + \Delta \bar{P}_{(2)} + \dots + \Delta \bar{P}_{(k)}$ .

5. Изменяются текущие координаты на  $x_k$ , т.е.  $x_k = x_{k-1} + \bar{u}_{(k-1)}$ , вычисляется добавка к инкрементальной матрице  $[K_{(k)}^*(x_{k-1}, \bar{u}_{(k-1)})]$ .

6. Суммируются перемещения по шагам  $\bar{u}_{(k)}^{(l+1)} = \Delta \bar{u}_{(k)}^{(1)} + \dots + \Delta \bar{u}_{(k)}^{(l+1)}$ .

7. Решение задачи завершается, если нагрузка не достигнет заданного значения  $\bar{P}_{(n)}$ .

Настоящая методика реализована в вычислительном комплексе «МИРЕЛА+» [7]. Рассмотрим решения некоторых задачи с применением МКЭ.

**Задача №1. Осесимметричный изгиб круглой ортотропной пластинки.**

Пластинка (рис. 2) радиуса  $R = 0,2$  м и толщиной  $h = 0,02$  м закреплена по контуру так, что в каждой точке пластинки плоскость изотропии материала параллельна срединной плоскости. Вертикальные элементы края пластинки у окружности срединной плоскости жестко закреплены от поворотов, но при этом край пластинки может свободно перемещаться в срединной плоскости. Пластинка нагружена равномерно распределенной поперечной нагрузкой. Упругие постоянные материалов: для изотропного материала модуль упругости 1-го рода  $E = 172400$  МПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ ; для композитного материала  $E_z = 43100$  МПа,  $E_r = E_\varphi = 172400$  МПа,  $G_{zr} = G_{z\varphi} = 17240$  МПа,  $G_{r\varphi} = 66307,6923$  МПа,  $\nu_{r\varphi} = \nu_{\varphi r} = 0,3$ ,  $\nu_{zr} = \nu_{z\varphi} = 0,0625$ ,  $\nu_{rz} = \nu_{\varphi z} = 0,25$ .

На графиках (рис. 3 – рис. 4) приведены зависимости относительного прогиба  $\xi$  от безразмерной нагрузки  $q^*$  для композитного и изотропного материалов.

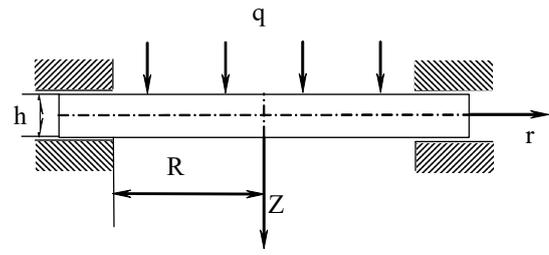
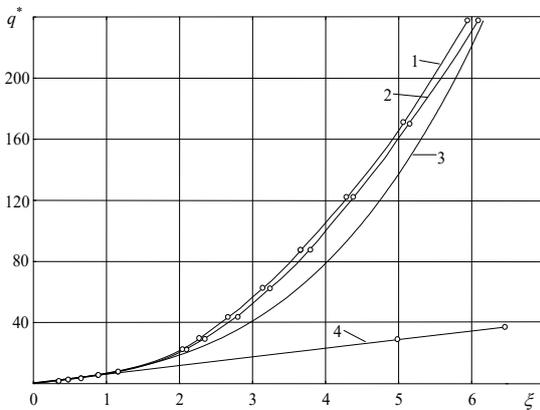
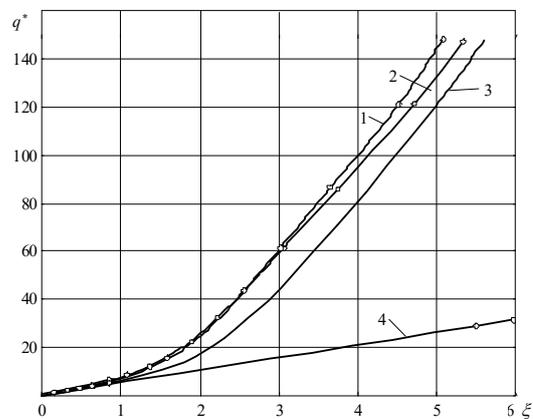


Рис. 2



1 – нелинейное решение квадратичным КЭ; 2 – нелинейное решение линейным КЭ; 3 – аналитическое нелинейное; 4 – линейное решение

Рис. 3 – Зависимость прогиба  $\xi$  от безразмерной нагрузки  $q^*$  для изотропного материала



1 – нелинейное решение квадратичным КЭ; 2 – нелинейное решение линейным КЭ; 3 – аналитическое нелинейное решение; 4 – линейное решение

Рис. 4 – Зависимость прогиба  $\xi$  от  $q^*$  для плиты из композитного материала

Решение МКЭ для изотропного материала сравнивалось с аналитическим [3]

$$\frac{6}{7} \xi^3 + \frac{16}{3(1-\mu^2)} \xi = q^*$$

которое при  $\mu = 0,3$  будет

$$0,8571\xi^3 + 5,8608\xi = q^*,$$

где  $q^* = \frac{q}{E} \left( \frac{R}{h} \right)^4$ .

Для композитного материала полученное решение МСКЭ сравнивалось с аналитическим [1]

$$\alpha_1 \xi + \alpha_3 \xi^3 = q^*,$$

где

$$\alpha_3 = \frac{38,4\mu_0 h^*}{\mu_2^2} \left( -\frac{\mu_0^3}{10} + \frac{7\mu_0^2 \mu_1}{12} - \frac{11\mu_0 \mu_1^2}{9} + \mu_1^3 \right) - \frac{16\mu_0^2}{3\mu_2^4} \left( \frac{\mu_0^3}{2} - \frac{89\mu_0^2 \mu_1}{30} + \frac{25\mu_0 \mu_1^2}{4} - 5\mu_1^3 \right),$$

$$\alpha_1 = \frac{32 \cdot \mu_0}{\mu_2}, \quad \mu_0 = 1 - \nu_{r\varphi}^2, \quad \mu_1 = 1 - \nu_{r\varphi}^2 + h^*, \quad \mu_2 = 1 - \nu_{r\varphi}^2 + 2h^*,$$

$$h^* = \frac{E_r h^2}{G_{r\varphi} R^2}, \quad q^* = \frac{q R^4}{2Dh}, \quad D = \frac{E_r h^3}{12(1 - \nu_{r\varphi}^2)}.$$

Анализ результатов расчета прогиба показывает удовлетворительное совпадение между численным и аналитическим решением.

### Задача №2. Изгиб квадратной пластинки, заземленной по контуру.

Квадратная пластинка со сторонами  $a = b = 0,4$  м и толщиной  $h = 0,04$  м, шарнирно опертая по всему контуру. Пластинка загружена равномерно распределенной поперечной нагрузкой  $q$ . Упругие постоянные материалов и плоскости ортотропии такие же, как в предыдущей задаче.

Полученное решение МКЭ сравнивалось с аналитическим [3]

$$q^* + \frac{\pi^8 h^2}{240(1 - \nu_{23}^2) a^2} \frac{E_2}{G_{23}} \xi_0 = \frac{\pi^6}{48(1 - \nu_{23}^2)} \xi + 7,48 \xi^3,$$

где  $\xi_0$  находится из уравнения

$$q^* = \frac{\pi^6}{48(1 - \nu_{23}^2)} \xi_0 + 7,48 \xi_0^3, \quad q^* = \frac{q_0}{E_2} \left( \frac{a}{h} \right)^4.$$

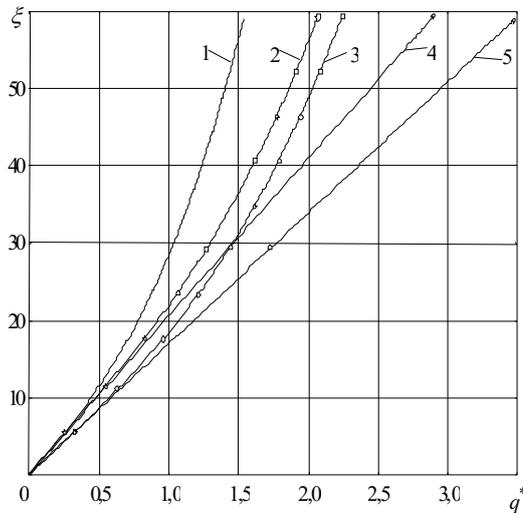
На графике (рис. 5) приведены зависимости прогиба  $\xi$  от нагрузки  $q^*$  для композитного и изотропного материалов. Между численным и аналитическим решением анализ результатов расчета прогиба показал удовлетворительное совпадение.

Анализ результатов расчета прогиба показал удовлетворительное совпадение между численным и аналитическим решением. Расхождение результатов объясняется тем, что при численном моделировании крайнее сечение искривляется в процессе деформации.

### Задача №3. Осевое сжатие полого конического амортизатора.

Полый конический резиновый амортизатор, к нижнему и верхнему основанию которого привулканизированы металлические пластины (рис. 6). Внутренние радиусы нижнего основания  $R_H = 0,106$  м и верхнего основания

$R_1 = 0,044$  м, толщина стенки конуса  $d = 0,048$  м, высота конуса  $H = 0,175$  м, толщина верхней металлической плиты  $h = 0,01$  м. Коэффициент Пуассона и модуль сдвига для резины  $\nu = 0,49$ ,  $\mu = 0,7$  МПа.



1 – аналитическое нелинейное решение; 2 – нелинейное решение для изотропного материала; 3 – нелинейное решение для композитного материала; 4 – линейное решение для изотропного материала; 5 – линейное решение для композитного материала

Рис. 5 – Зависимость прогиба  $\xi$  в центре плиты от нагрузки  $q^*$

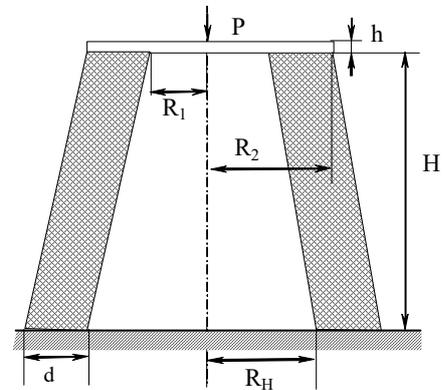


Рис. 6 – Конический амортизатор

На основе полученного численного решения построена характеристика амортизатора в безразмерных координатах  $q$  и  $\delta$

$$q = \frac{P}{3\mu\pi(R_2^2 - R_1^2)}, \quad \delta = \Delta/H,$$

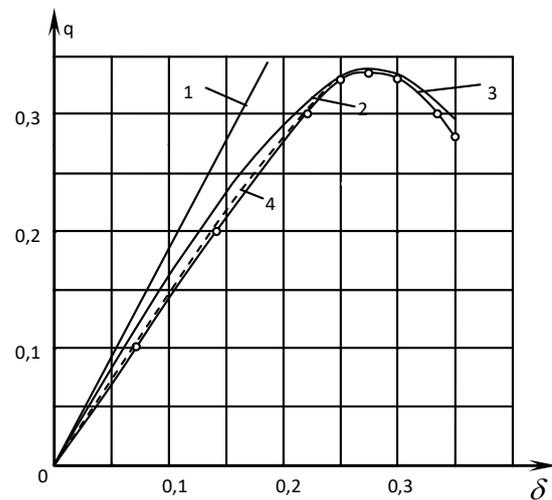
где  $P$  – сила, соответствующая осадке амортизатора  $\Delta$ ;  $\mu$  – модуль сдвига материала.

Результаты сравнивались с данными [4]. Из сравнения расчетных кривых с результатами аналитического расчета [4, 8] видно удовлетворительное совпадение (рис. 7). При достижении относительной осадки  $\delta = 0,33$  касательная к кривой «нагрузка-прогиб» занимает горизонтальное положение, что свидетельствует о достижении точки потери устойчивости.

**Выводы.** Рассмотрена инкрементальная теория, в которой используются тензоры напряжений Пиолы-Кирхгофа и тензоры деформаций Грина. Разработан алгоритм, где нелинейная задача сводится к последовательности линейных при помощи шаговых итерационных алгоритмов. Исследование полученных результатов показывает, что при решении некоторых задач необходимо применять инкрементальную теорию. Кроме того, краевые условия могут влиять на качество результатов. Разработанная методика позволяет моделировать поведение промышленных конструкций в условиях максимально приближенным к эксплуатационным.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин (прочность, устойчивость и колебания). – М.: Наука, 1987. – 360 с.
2. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
3. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. М: ГИИТЛ, 1956. – 420 с.
4. Глухих С.А. Нелинейная задача сжатия осесимметричного амортизатора // Вопр. динамики и прочности. – 1981. – Вып. 38. – С. 5-9.
5. Дохняк Б.М., Киричевский В.В., Ищенко М.И. Применение моментной схемы метода конечных элементов для решения задач инкрементальной теории упругости с начальными напряжениями // Проблемы прочности. – 2006. – №3. – С. 131-143.
6. Киричевский В.В., Сахаров А.С. Нелинейные задачи термомеханики конструкций из слабосжимаемых эластомеров. – К.: Будівельник, 1992. – 216 с.
7. Метод конечных элементов в вычислительном комплексе «МИРЕЛА+» / Киричевский В.В., Дохняк Б.М., Козуб Ю.Г. и др. – К.: Наук. думка, 2005. – 403 с.
8. Метод конечных элементов в механике эластомеров / В.В. Киричевский. – К.: Наук. думка, 2002. – 655 с.



1 – линейное решение; 2 – аналитическое решение [4]; 3 – нелинейное инкрементальное решение МКЭ; 4 – нелинейное инкрементальное решение, обычный МКЭ.

Рис. 7 – Зависимость осадки амортизатора от нагрузки

УДК 631.33

Беседа А.А.

## НАПРАВЛЕНИЯ ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПОСЕВНЫХ МАШИН

У статті визначені характерні тенденції для утворення та удосконалення ефективних посівних машин, наведені сучасні актуальні енергозберігаючі технології вирощування і посіву зерно-трав'яних сільськогосподарських культур, а також їх недоліки та агротехнічні вимоги при посіві в умовах вітрової та водної ерозії.

## DIRECTIONS OF INCREASING TO EFFICIENCY OF THE SOWING MACHINES

The typical trends are determined for making and improvements of the efficient sowing machines. They are brought modern actual енергозберігаючі technologies вирощування and sowing зерно-трав'яних agricultural cultures, as well as their defect. Agrotechnical requirements at sowing in condition ветрової and water erosion.

В современном производстве продукции растениеводства широко используют машинные технологии.

Цель любой технологии – получение максимального количества качественной продукции. Операции технологии возделывания можно условно разделить на две группы. К первой группе относятся операции, обеспечивающие создание