

**РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО
СОСТОЯНИЯ МНОГОСЛОЙНОГО УПРУГОГО ЦИЛИНДРА
В УСЛОВИЯХ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ**

Аналітично вирішена задача Ляме для багатошарового товстостінного циліндра з різними пружними характеристиками, який знаходиться під постійним навантаженням внутрішнього і зовнішнього тиску з урахуванням сили осевого стиснення. Наведено осесиметричний випадок плоскої деформації багатошарового циліндра. Розв'язок одержано за допомогою метода функцій підатливості, який розроблено для безперервних шаруватих середовищ.

**CALCULATION OF STRESS-DEFORMED STATE OF THE
MULTILAYER ELASTIC CYLINDER, WHICH ARE IN PLANE DEFORMATION CONDITIONS**

The problem of Lame for multilayer thick – walled cylinder with different elastic characteristics is solved. Cylinder is loaded by constant internal and external pressure and axial compressed force. Axially symmetric case of plane deformation of the multilayer cylinder is adduced. The decision is obtained by method of the compliance functions which is developed for continuous laminated mediums.

В теории упругости известно решение осесимметричной задачи для однослойного однородного полого цилиндра нагруженного наружным и внутренним постоянным давлением [1, 2]. Аналитические зависимости, полученные Ляме для однослойного цилиндра, применяются для расчета составных толстостенных труб [3] и многослойных труб и емкостей [4]. С увеличением количества слоев в системе, превышающих два и более, а в, особенности, когда упругие характеристики и физико - механические свойства слоев значительно отличаются друг от друга или когда определитель системы линейных уравнений близок по величине к нулю – существующие методы расчета непрерывных слоистых сред дают значительные ошибки в расчетах [5].

При бурении скважин в напряженном горном массиве вокруг скважин происходит изменение прочности горных пород за счет зоны разгрузки от горного давления и подачи в них различных рабочих агентов, изменяющих физико-механическое состояние среды. Прочность угля может уменьшаться при его газонасыщении и увеличиваться при его дегазации [6, 7, 8]. Наличие воды в угле снижает упругие характеристики пород и повышает пластические свойства угля.[9]. Для разработки различных способов и средств дегазации напряженного угольного массива необходимо иметь эффективные методы расчета подобных разномодульных систем.

В данной работе предлагается расчет многослойного цилиндра (массива) с применением метода функций податливости, разработанного для многослойных оснований [5]. Суть этого метода заключается в том, что если известно общее решение для однослойной структуры с точностью до произвольных постоянных – решение для многослойной структуры получают, заменив безразмерные произвольные постоянные в уравнениях для напряжений и перемещений на по-

стоянные, имеющие конкретный физический смысл, как в методе начальных параметров, а удовлетворение условиям сопряжения для каждого слоя цилиндра производят по рекуррентным зависимостям методом обратной прогонки.

Рассмотрим многослойный пустотелый цилиндр, который находится под воздействием постоянных внешнего q_1 и внутреннего q_2 статического давлений, а по оси z сжат постоянной осевой силой F (рис. 1).

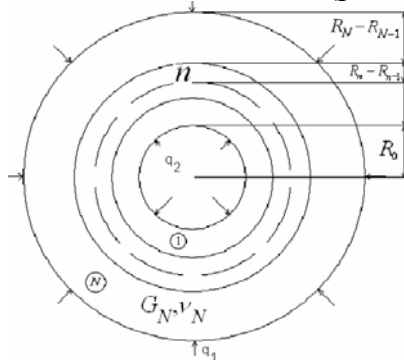


Рис. 1 – Схема действия сил при нагружении многослойного цилиндра

Многослойный цилиндр (массив) имеет внутренние радиусы R_0, R_1, \dots, R_N , слои считаются упругими, изотропными и однородными. Механические свойства слоев задаются его модулями сдвига G_1, \dots, G_n и коэффициентами Пуассона ν_1, \dots, ν_n . Слой с номером n занимает область $R_{n-1} < R < R_n$. Слои в процессе деформирования плотно прилегают друг к другу и не отстают друг от друга. Деформация цилиндра является плоской и осесимметричной. Удобно при такой схеме нагружения и геометрии нагружаемой системы решать задачу в цилиндрической системе координат. Это значит, что поле перемещений имеет следующий вид:

$$\vec{u} = \vec{i}_R u_R(R),$$

где \vec{i}_R – единичный вектор цилиндрической системы координат в радиальном направлении, u_R – проекция вектора перемещения на радиальное направление.

Задача статического деформирования многослойного цилиндра сводится к определению перемещений и напряжений от каждой силы в отдельности. Количество слоев в системе неограниченно. Контакт слоев в данной постановке задачи – гладкий, а, следовательно, касательные напряжения между различными слоями равны нулю. В начале решаем задачу для многослойного цилиндра при нагружении его только внешним давлением q_1 , полагая при этом равным нулю внутреннее давление q_2 . Вторым этапом решения задачи будет нагружение только внутренним давлением q_2 , полагая внешнее давление q_1 равным нулю. Так же отдельно рассматривается нагружение многослойного цилиндра осевой сжимающей силой F . Тогда результирующие радиальные напряжения

σ_{RR}^0 , тангенциальные напряжения $\sigma_{\varphi\varphi}^0$, осевые напряжения σ_{33}^0 и радиальные перемещения U_R^0 в общем случае нагружения определяются суперпозицией напряжений и перемещений от каждой действующей нагрузки в отдельности:

$$U_R^0 = U1_R^0 + U2_R^0 + U3_R^0, \quad (1)$$

где $U1_R^0$ – радиальное перемещение от внешней нагрузки q_1 ; $U2_R^0$ – радиальное перемещение от внутренней нагрузки q_2 ; $U3_R^0$ – радиальное перемещение от осевой сжимающей силы F .

$$\sigma_{RR}^0 = \sigma1_{RR}^0 + \sigma2_{RR}^0 \quad (2)$$

где $\sigma1_{RR}^0$ – радиальное напряжение от внешней нагрузки q_1 , $\sigma2_{RR}^0$ – радиальное напряжение от внутренней нагрузки q_2 .

$$\sigma_{\varphi\varphi}^0 = \sigma1_{\varphi\varphi}^0 + \sigma2_{\varphi\varphi}^0 \quad (3)$$

где $\sigma1_{\varphi\varphi}$ – тангенциальное напряжение от внешней нагрузки q_1 ; $\sigma1_{\varphi\varphi}$ – тангенциальное напряжение от внутренней нагрузки q_2 .

Осевая сжимающая сила F влияет только на величину радиального перемещения, а напряжения σ_{RR}^0 и $\sigma_{\varphi\varphi}^0$ остаются неизменными [3].

В работе рассматривается два случая плоской деформации:

- 1) осевая деформация равна нулю $\varepsilon_z = 0$
- 2) осевая деформация постоянная $\varepsilon_z = const$, за счет действия дополнительной осевой силы F .

1. Случай нагружения многослойного цилиндра только внешней нагрузкой q_1 .

Система разрешающих уравнений о статическом деформировании многослойного цилиндра в области n -го слоя $R_{n-1} < R < R_n$ имеет вид [1].

$$\begin{cases} \operatorname{div} \hat{\sigma} = 0, \\ \hat{\sigma} = 2G_n \left(\hat{g} \frac{\nu_n}{1-2\nu_n} \operatorname{Sp} \hat{\varepsilon} + \hat{\varepsilon} \right), \\ \hat{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left((\vec{\nabla} \vec{u})^T + \vec{\nabla} \vec{u} \right) \end{cases}$$

(4)

где $\hat{\sigma}$ – поле напряжений; $\hat{\varepsilon}$ – поле деформаций.

Тензор напряжений через перемещения выражается следующим образом [1]

$$\hat{\sigma} = \frac{2G_n}{1-2\nu_n} \left(\vec{i}_R \vec{i}_R \left((1-\nu_n) \frac{\partial u_R}{\partial R} + \nu_n \frac{u_R}{R} \right) + \vec{i}_\varphi \vec{i}_\varphi \left(\nu_n \frac{\partial u_R}{\partial R} + (1-\nu_n) \frac{u_R}{R} \right) + \vec{i}_3 \vec{i}_3 \nu_n \left(\frac{\partial u_R}{\partial R} + \frac{u}{R} \right) \right) \quad (5)$$

Граничные условия задачи:

$$\begin{cases} \sigma_{1_{RR}}|_{R=R_0} = 0 \\ \sigma_{1_{RR}}|_{R=R_N} = -q_1 \end{cases} \quad (6)$$

Условия сопряжения слоев (совместности деформирования):

$$\begin{cases} U_{1_R}|_{R_n+0} = U_{1_R}|_{R=R_n-0} \\ \sigma_{1_{RR}}|_{R=R_n+0} = \sigma_{1_{RR}}|_{R=R_n-0} \end{cases} \quad (7)$$

Рассмотрим n - й слой многослойного цилиндра. Он представляет собой однородный цилиндр, который занимает область $R_{n-1} < R < R_n$. В этой области необходимо решить задачу для системы (4) с граничными условиями (6, 7). Система (4) сводится к уравнению Эйлера [1, 3]:

$$R^2 \frac{d^2 u_R}{dR^2} + R \frac{du_R}{dR} - u = 0 \quad (8)$$

Уравнение (8) есть обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка и решение его известно [1, 3].

Тогда для цилиндра в области n - го слоя $R_{n-1} < R < R_n$ радиальное перемещение $U_{1_R}^0$ и напряжение $\sigma_{1_{RR}}^0$, тангенциальное $\sigma_{1_{\varphi\varphi}}^0$ и осевое напряже-

ние $\sigma_{1_{33}}^0$ будет иметь вид [1, 2]:

$$U1_R^0 = A_n \cdot R + \frac{B_n}{R} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \sigma_{1_{RR}}^0 = 2 \cdot G_n \cdot \left(\frac{A_n}{1 - 2 \cdot \nu_n} - \frac{B_n}{R^2} \right) \\ \sigma_{1_{\varphi\varphi}}^0 = 2 \cdot G_n \cdot \left(\frac{A_n}{1 - 2\nu_n} + \frac{B_n}{R^2} \right) \\ \sigma_{1_{33}}^0 = 4 \cdot G_n \frac{\nu_n}{1 - 2 \cdot \nu_n} \cdot A_n \end{cases} \quad (10)$$

где A_n и B_n – неизвестные константы для n - го слоя, которые подлежат определению из граничных условий

Применим для решения поставленной задачи метод функций податливости, разработанный для расчета многослойных непрерывных систем и изложенный в работе [5].

Для удобства удовлетворения граничным условиям вместо безразмерных констант A_n та B_n введем новые константы s_n и τ_n – начальные параметры напряженно-деформированного состояния для n - го слоя, следующим образом:

$$s_n = \frac{2G_n \cdot U1_R^0}{R_n} \Big|_{R=R_n-0}, \quad \tau_n = \sigma_{1_{RR}}^0 \Big|_{R=R_n-0} \quad (11)$$

Через новые константы s_n и τ_n решение системы (10) запишется в виде:

$$U1_R^0 = s_n \cdot \frac{\kappa_n \cdot (R^2 \cdot (1 - 2\nu_n) + R_n^2)}{4 \cdot G_n \cdot R \cdot (1 - 2\nu_n)} + \tau_n \cdot \frac{\kappa_n \cdot (R^2 - R_n^2)}{4 \cdot G_n \cdot R} \quad (12)$$

$$\sigma_{1_{RR}}^0 = s_n \cdot \frac{\kappa_n \cdot (R^2 - R_n^2)}{2R^2 \cdot (1 - 2\nu_n)} + \tau_n \cdot \frac{\kappa_n \cdot (R^2 + (1 - 2\nu_n) \cdot R_n^2)}{2R^2 \cdot (1 - 2\nu_n)} \quad (13)$$

$$\sigma_{1_{\varphi\varphi}}^0 = s_n \cdot \frac{\kappa_n \cdot (R^2 + R_n^2)}{2 \cdot R^2 \cdot (1 - 2\nu_n)} + \tau_n \cdot \frac{\kappa_n \cdot (R^2 - (1 - 2\nu_n) \cdot R_n^2)}{2 \cdot R^2 \cdot (1 - 2\nu_n)} \quad (14)$$

$$\sigma_{1_{33}}^0 = s_n \cdot \frac{\nu_n}{1 - \nu_n} + \tau_n \cdot \frac{\nu_n}{1 - \nu_n} \quad (15)$$

где $\kappa_n = \frac{1 - 2\nu_n}{1 - \nu_n}$.

Константы s_n и τ_n находятся из граничных условий (6).

Удовлетворяя условиям сопряжения (7) и используя выражение (12) получим рекуррентные соотношения для нахождения начальных параметров:

$$s_n = s_{n+1} \cdot \frac{\kappa_{n+1} \cdot \gamma_{n+1} \cdot (R_n^2 \cdot (1 - 2\nu_{n+1}) + R_{n+1}^2)}{2 \cdot R_n^2 \cdot (1 - 2\nu_{n+1})} + \tau_{n+1} \cdot \frac{\kappa_{n+1} \cdot \gamma_{n+1} \cdot (R_n^2 - R_{n+1}^2)}{2 \cdot R_n^2} \quad (16)$$

$$\tau_n = s_{n+1} \cdot \frac{\kappa_{n+1} \cdot (R_n^2 - R_{n+1}^2)}{2 \cdot R_n^2 \cdot (1 - 2 \cdot \nu_{n+1})} + \tau_{n+1} \cdot \frac{\kappa_{n+1} \cdot (R_n^2 + (1 - 2 \cdot \nu_{n+1}) \cdot R_{n+1}^2)}{2 \cdot R_n^2 \cdot (1 - 2 \cdot \nu_{n+1})} \quad (17)$$

где $\gamma_{n+1} = \frac{G_n}{G_{n+1}}$.

Из граничного условия (6) на внутренней границе $\sigma_{1_{RR}}|_{R=R_0} = 0$ и уравнения (13) получим соотношение для определения констант s_1 , τ_1 и коэффициента податливости C_1 для первого слоя цилиндра:

$$s_1 = -C_1 \cdot \tau_1 \quad (18)$$

Коэффициент податливости для первого слоя определяется по формуле:

$$C_1 = \frac{R_0^2 + (1 - 2\nu_1) \cdot R_1^2}{R_0^2 - R_1^2} \quad (19)$$

Коэффициенты податливости – это механические характеристики многослойных систем, которые не зависят от приложенных нагрузок, а зависят только от геометрических и механических характеристик слоев. Поэтому их

можно найти еще до решения граничной задачи [5].

С помощью метода математической индукции можно доказать, что для произвольного слоя справедливо выполняется следующее соотношение:

$$S_n = -C_n \cdot \tau_n \quad (20)$$

Для доказательства этого положения подставим выражение (18) в рекуррентные соотношения (16, 17) и находим последовательно значения пар констант $S_2, \tau_2; S_3, \tau_3; S_4, \tau_4, \dots, S_n, \tau_n$.

Рассмотрим соотношение $S_{n-1} = -C_{n-1} \cdot \tau_{n-1}$. Выражая S_{n-1} и τ_{n-1} по формулам (16), (17) получим рекуррентные соотношения для определения коэффициентов податливости C_n для остальных слоев системы.

$$C_n = \frac{R_{n-1}^2 \cdot (\gamma_n \cdot (1 - 2\nu_n) + C_{n-1}) + R_n^2 \cdot (1 - 2\nu_n) \cdot (C_{n-1} - \gamma_n)}{R_{n-1}^2 \cdot (\gamma_n \cdot (1 - 2\nu_n) + C_{n-1}) + R_n^2 \cdot (\gamma_n - C_{n-1})} \quad (21)$$

По известному значению коэффициента податливости C_1 для первого слоя системы, используя формулу (21) можно определить коэффициенты податливости для каждого внутреннего слоя цилиндра.

Из граничного условия (6) на внешней границе $\sigma_{1RR}|_{R=R_N} = -q_1$ определяем константу для внешнего слоя системы $\tau_N = -q_1$. Используя выражения (20, 21) можно найти значения константы S_N . Зная эти константы и используя рекуррентные формулы (16, 17) можно найти S_n и τ_n для любого произвольного слоя, а через них определить перемещения и напряжения для любого слоя цилиндра по формулам (12, 13, 14, 15).

2. Случай нагружения многослойного цилиндра только постоянным внутренним давлением q_2

Исходная система уравнений (4) остается такой же как и в предыдущем случае. Условия сопряжения слоев остаются неизменными (7), а изменятся лишь граничные условия на внутренней и внешней поверхности цилиндра.

Граничные условия, рассматриваемой задачи будут такими:

1) условия сопряжения слоев:

$$U2_R^0 \Big|_{R=R_n-0} = U2_R^0 \Big|_{R=R_n+0} \quad (22)$$

$$\sigma2_{RR}^0 \Big|_{R=R_n-0} = \sigma2_{RR}^0 \Big|_{R=R_n+0} \quad (23)$$

2) статическое условие на внешней границе:

$$\sigma2_{RR}^0 \Big|_{R=R_N} = 0 \quad (24)$$

3) статическое условие на внутренней поверхности:

$$\sigma2_{RR}^0 \Big|_{R=R_0} = -q_2, \quad (25)$$

где q_2 – заданное значение внутренней нагрузки.

Как и в предыдущем случае для удовлетворения граничным условиям введем новые постоянные \bar{s}_n и $\bar{\tau}_n$ – начальные параметры напряженно-деформированного состояния для n -го слоя, следующим образом:

$$\bar{s}_n = \frac{2G_n \cdot U2_R^0}{R_{n-1}} \Big|_{R=R_{n-1}} \quad \text{и} \quad \bar{\tau}_n = \sigma2_{RR}^0 \Big|_{R=R_{n-1}} \quad (26)$$

Через новые постоянные \bar{s}_n и $\bar{\tau}_n$ решения статической задачи запишутся в виде:

$$U2_R^0 = \frac{\kappa_n ((1-2\nu_n)R^2 + R_{n-1}^2)}{4G_n R(1-2\nu_n)} \bar{s}_n + \frac{\kappa_n (R^2 - R_{n-1}^2)}{4G_n R} \bar{\tau}_n \quad (27)$$

$$\sigma2_{RR}^0 = \frac{\kappa_n (R^2 - R_{n-1}^2)}{2R^2(1-2\nu_n)} \bar{s}_n + \frac{\kappa_n (R^2 + (1-2\nu_n)R_{n-1}^2)}{2R^2(1-2\nu_n)} \bar{\tau}_n \quad (28)$$

$$\sigma2_{\varphi\varphi}^0 = \frac{\kappa_n (R^2 + R_{n-1}^2)}{2R^2(1-2\nu_n)} \bar{s}_n + \frac{\kappa_n (R^2 - (1-2\nu_n)R_{n-1}^2)}{2R^2(1-2\nu_n)} \bar{\tau}_n \quad (29)$$

$$\sigma2_{33}^0 = \frac{\nu_n}{1-\nu_n} \bar{s}_n + \frac{\nu_n}{1-\nu_n} \bar{\tau}_n, \quad (30)$$

где $\kappa_n = \frac{1-2\nu_n}{1-\nu_n}$.

Постоянные \bar{s}_n и $\bar{\tau}_n$ находятся из граничных условий. Удовлетворяя условиям сопряжения слоев (22, 23), получим рекуррентные соотношения для нахождения начальных параметров:

$$\bar{s}_{n+1} = \frac{\kappa_n \gamma_n ((1-2\nu_n)R_n^2 + R_{n-1}^2)}{2(1-2\nu_n)R_n^2} \bar{s}_n + \frac{\kappa_n \gamma_n (R_n^2 - R_{n-1}^2)}{2(1-2\nu_n)R_n^2} \bar{\tau}_n \quad (31)$$

$$\bar{\tau}_{n+1} = \frac{\kappa_n (R_n^2 - R_{n-1}^2)}{2(1-2\nu_n)R_n^2} \bar{s}_n + \frac{\kappa_n (R_n^2 + (1-2\nu_n)R_{n-1}^2)}{2(1-2\nu_n)R_n^2} \bar{\tau}_n, \quad (32)$$

где $\gamma_n = \frac{G_{n+1}}{G_n}$.

Из условия (24) на внешней границе получим соотношение $\bar{s}_N = -P_N \cdot \bar{\tau}_N$, из которого определим коэффициент податливости P_N для внешнего слоя цилиндра по формуле

$$P_N = \frac{R_N^2 + (1-2\nu_N)R_{N-1}^2}{R_{N-1}^2 - R_N^2} \quad (33)$$

С помощью метода математической индукции довольно просто доказать, что для произвольного слоя выполняется соотношение:

$$\bar{s}_n = -P_n \cdot \bar{\tau}_n \quad (34)$$

Рассмотрим соотношение $\bar{s}_{n+1} = -P_{n+1} \cdot \bar{\tau}_{n+1}$. Выражая \bar{s}_{n+1} и $\bar{\tau}_{n+1}$ по формулам (30, 31), получим рекуррентное соотношение для определения коэффициентов податливости для любого слоя цилиндра:

$$P_n = \frac{R_n^2 (P_{n+1} - (1-2\nu_n)\gamma_n) + R_{n-1}^2 (1-2\nu_n)(P_{n+1} + \gamma_n)}{R_n^2 ((1-2\nu_n)\gamma_n - P_{n+1}) + R_{n-1}^2 (\gamma_n - P_{n+1})} \quad (35)$$

По известному значению коэффициента P_N , используя формулу (35), методом обратной прогонки можно построить коэффициенты податливости для каждого слоя многослойного цилиндра.

Из условия (25) на внутренней границе имеем $\bar{\tau}_1 = -q_2$. Используя зависимость (34) можно найти значение константы \bar{s}_1 для первого слоя цилиндра. Зная значения \bar{s}_1 , $\bar{\tau}_1$ и воспользовавшись рекуррентными соотношения-

ми (31), (32) можно найти константы \bar{s}_n и $\bar{\tau}_n$ для произвольного слоя, а через них перемещения и напряжения в произвольном слое по формулам (27 – 30).

Когда цилиндр расположен между жесткими неподвижными основаниями величина плоской деформации $\varepsilon_z = 0$. Суммарные радиальные, тангенциальные, осевые напряжения и перемещения от действия внутреннего q_2 и внешнего q_1 давления будут определяться по формулам .

$$\sigma_{RR}^0 = \sigma 1_{RR}^0 + \sigma 2_{RR}^0 \quad (36)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^0 = \sigma 2_{\varphi\varphi}^0 + \sigma 2_{\varphi\varphi}^0 \quad (37)$$

$$\sigma_{33}^0 = \sigma 1_{33}^0 + \sigma 2_{33}^0 \quad (38)$$

$$U_{RR}^0 = U 1_{RR}^0 + U 2_{RR}^0 \quad (39)$$

В случае, когда жесткие основания переместились на некоторую постоянную величину $\varepsilon_z = const$, то есть многослойный цилиндр, кроме радиальных давлений, дополнительно воспринимает еще и продольную осевую силу F , в его поперечных сечениях возникают напряжения, определяемые по формуле в работе [3]:

$$\sigma_z = \frac{F}{S} = \frac{F}{\pi \cdot (R_N^2 - R_0^2)}, \quad (40)$$

Поэтому к выражению (39) для радиальных перемещений добавляется слагаемое:

$$\Delta U = -\nu_{np} \frac{\sigma_z}{2G_{np} \cdot (1 - \nu_{np})} R, \quad (41)$$

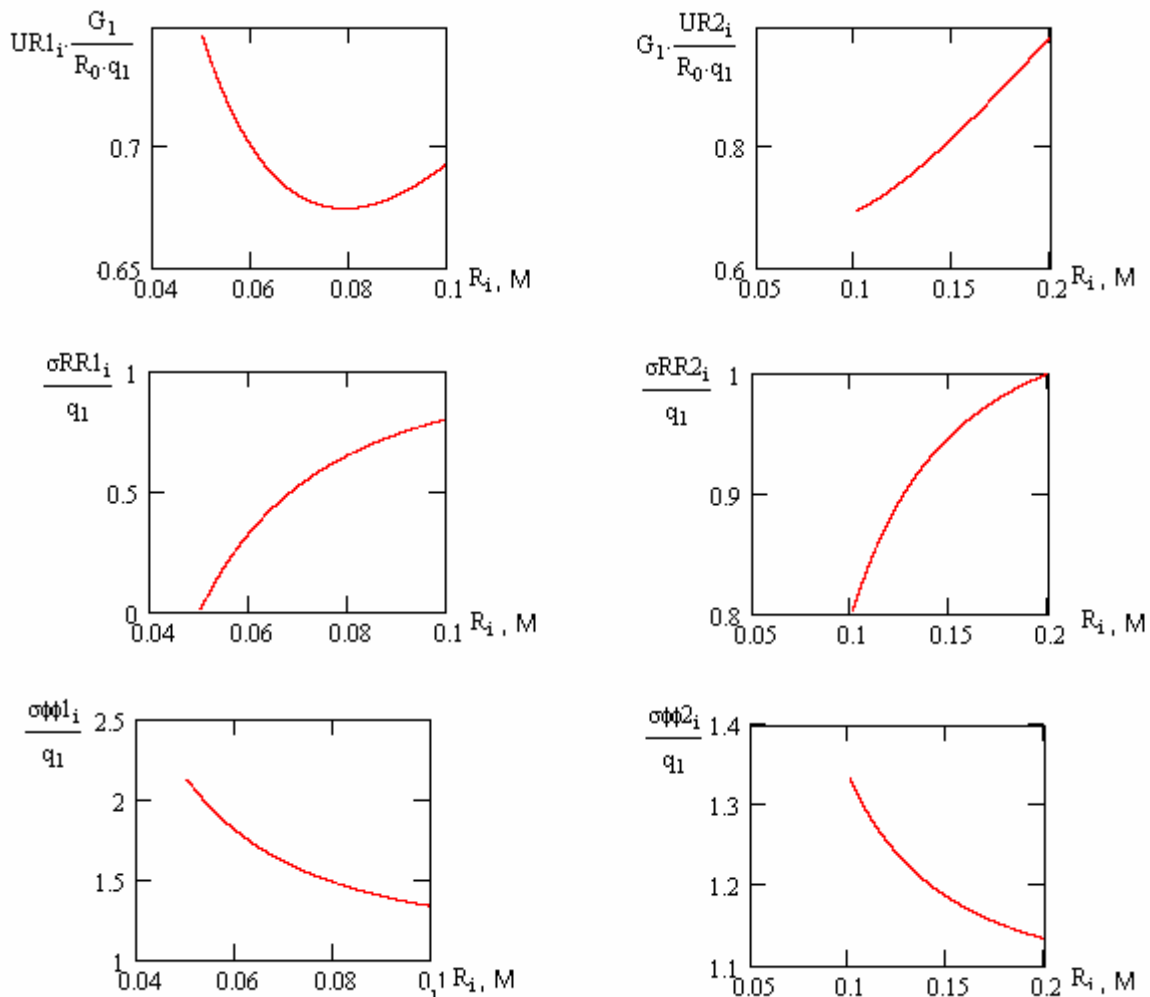
где ν_{np} и G_{np} – приведенные коэффициенты Пуассона и модули сдвига для многослойного цилиндра:

$$\nu_{np} = \frac{\nu_1 \cdot (R_1 - R_0) + \nu_2 \cdot (R_2 - R_1) + \dots + \nu_n \cdot (R_n - R_{n-1})}{(R_1 - R_0) + (R_2 - R_1) + \dots + (R_n - R_{n-1})},$$

$$G_{np} = \frac{G_1 \cdot (R_1 - R_0) + G_2 \cdot (R_2 - R_1) + \dots + G_n \cdot (R_n - R_{n-1})}{(R_1 - R_0) + (R_2 - R_1) + \dots + (R_n - R_{n-1})}$$

Подставляя в формулы (12, 13, 14, 15, 27, 28, 29, 30) значения коэффициентов податливости и констант C_1 , P_N , s_1 , τ_1 , \bar{s}_N , $\bar{\tau}_N$ для первого и последнего слоя цилиндра получаем известное решение задачи Ляме для упругого однослойного однородного цилиндра нагруженного наружным и внутренним давлением [3].

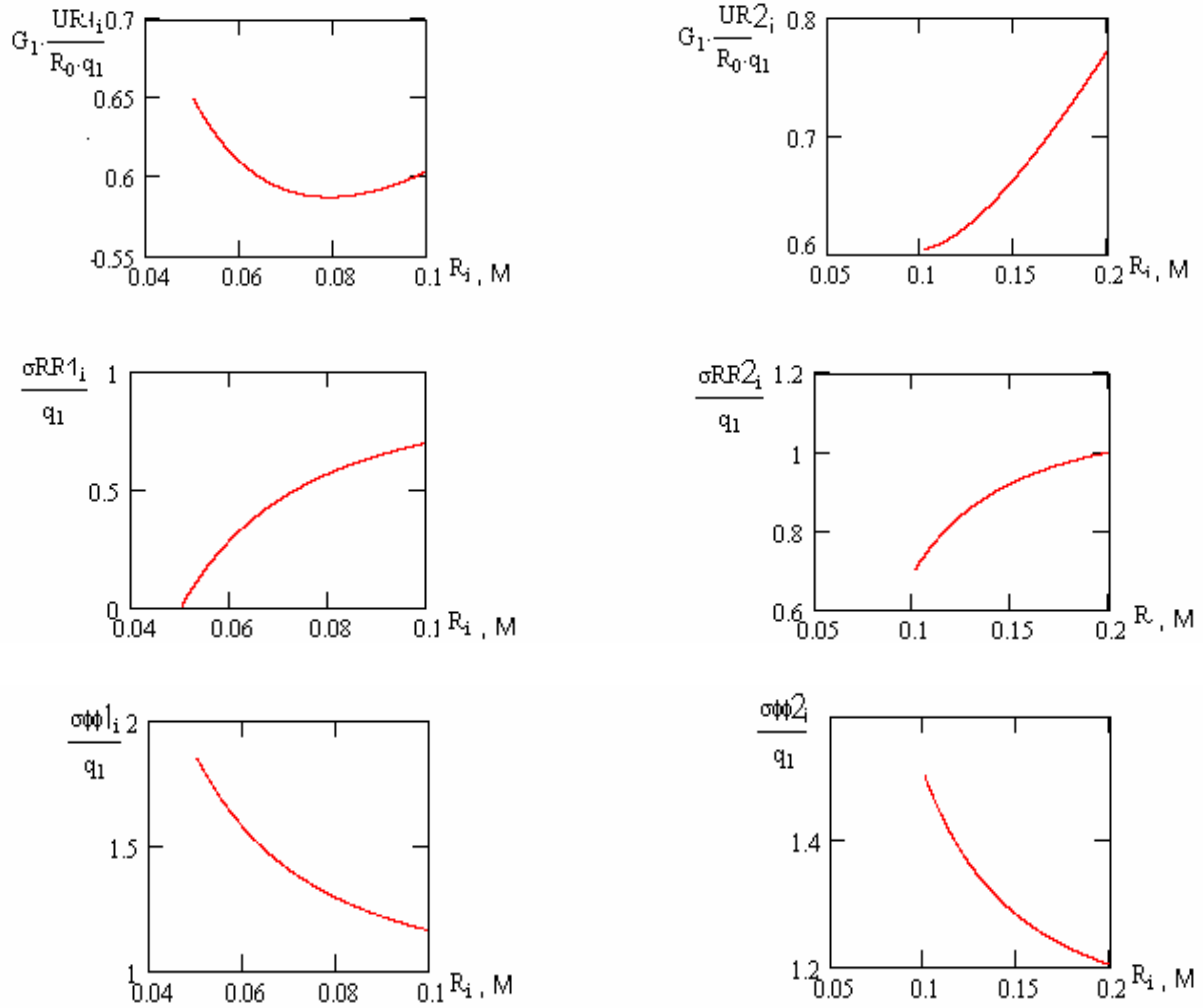
На рис. 2, 3 приведен пример расчета двухслойного цилиндра нагруженного внешним давлением $q_1 = 50 \cdot 10^5$ Па со следующими параметрами: внутренний радиус $R_0 = 0,05$ м, внутренние радиусы первого и второго слоя, соответственно, равны: $R_1 = 2R_0$, $R_2 = 4 \cdot R_0$.



1 – индекс для первого слоя; 2 – индекс для второго слоя; $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$;
 $G_1 = G_2 = 7,2 \cdot 10^8$ Па; $R_0 = 0,05$ м; $R_1 = 0,1$ м; $R_2 = 0,2$ м; $q_1 = 50 \cdot 10^5$ Па.

Рис. 2. – Характер изменения радиальных перемещений $UR1_i$, $UR2_i$ и напряжений σ_{RR1_i} , σ_{RR2_i} и тангенциальных напряжений $\sigma_{\phi\phi 1_i}$, $\sigma_{\phi\phi 2_i}$ для двухслойного однородного цилиндра от действия внешней нагрузки q_1

Коэффициенты Пуассона для слоев принимались одинаковыми $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$. Модули сдвига в первом варианте расчета, были равны $G_1 = G_2 = 7,2 \cdot 10^8$ Па, а во втором варианте счета $G_1 = 5 \cdot 10^8$ Па и $G_2 = 7 \cdot 10^8$ Па.



1 – индекс для первого слоя; 2 – индекс для второго слоя; $G_1 = 5 \cdot 10^8$ Па,
 $G_2 = 7 \cdot 10^8$ Па; $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$; $q_1 = 5 \cdot 10^5$ Па;

Рис. 3 – Изменение радиальных перемещений $UR1_i$, $UR2_i$ и напряжений σ_{RR1_i} , σ_{RR2_i} и тангенциальных напряжений $\sigma_{\phi\phi1_i}$, $\sigma_{\phi\phi2_i}$ в двухслойном разномодульном цилиндре

Из полученного выше решения задачи о напряженно-деформированном состоянии многослойного цилиндра и приведенных двух вариантов расчетов можно сделать следующие выводы:

1) решена аналитически задача Ляме для многослойного цилиндра с различными упругими характеристиками от действия постоянных внешнего и внутреннего давления для произвольного количества слоев;

2) действие осевой сжимающей силы увеличивает радиальное перемещение слоев цилиндра, которое должно учитываться при выборе способов и методов воздействия на подобные системы посредством подачи в полость цилиндра (скважин) различных рабочих сред;

3) проверка условий сопряжения показала, что радиальные перемещения и напряжения для близлежащих точек двух соседних цилиндрических слоев, как для однородных, так и для разномодульных слоев полностью совпадают рис.2, рис 3;

4) тангенциальные напряжения для однородных слоев при переходе из слоя в соседний слой изменяются плавно рис 2, а для разномодульных слоев претерпевают разрыв рис.3;

5) радиальные перемещения и напряжения непрерывны при переходе из одного слоя в другой для однородных и разнородных слоев;

6) радиальные перемещения в однородном и разнородном двухслойном цилиндре имеют экстремум (минимум), который находится в первом слое;

7) высокая точность полученных результатов обеспечивается за счет совместного применения метода начальных функций и способа обратной прогонки.

Полученное решение может быть использовано при расчете непрерывных разномодульных упругих слоистых сред (горных пород, многослойных сосудов, работающих под высоким давлением) при их осесимметричном нагружении для случая плоской деформации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 939 с.
2. Амензаде Ю. А. Теория упругости. – М.: Наука, 1971. – 300 с.
3. Писаренко Г.С., Агарев В.А. и др. Сопrotивление материалов. – Киев, 1963. – 786 с.
4. Хисматуллин Е. Р., Королев Е. М. , Лифшиц В. И. и др. Сосуды и трубопроводы высокого давления. – М.: Машиностроение, 1990. – 384 с.
5. Ламзюк В.Д., Приварников А.К. Решение граничных задач теории упругости для многослойных оснований. Днепропетровск, 1978. – Вып.1, 2, – 80 с.
6. Кравец В. И. Практика разработки защитных пластов на шахтах Центрального района. // Безопасность труда в промышленности. – 1967.- №12. – С.10 - 14.
7. Эттингер И. Л. Внезапные выбросы угля и газа и структура угля. – М.: Недра, 1969. – 250 с.
8. Эттингер И. Л, Ламба В. Г. Изменение механической прочности углей при насыщении их газами. // Уголь. – 1957, – №10. – С.16 - 18.
9. Осокин В. В. Влияние напряженного состояния и влажности на параметры волн разрежения в угле // Разработка месторождений полезных ископаемых. – Киев: Техника, 1971. – Вып.25 – С. 52 - 55.