

Докт. техн. наук, профессор В.Г. Перепелица,
канд. техн. наук Л.Д. Шматовский,
канд. физ.-мат. наук А.Н. Коломиец

МЕТОДИКА АНАЛИТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ЗАБОЯХ РАЗНЫХ ФОРМ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ ГОРНЫХ ВЫРАБОТОК

У статті розроблена та викладена методика аналітичних досліджень напружено-деформованого стану масиву гірських порід поблизу забоїв плоскої, сферичної та конічної форми при проведенні гірських виробок

THE METHODS OF ANALYTIC RESEARCHS OF DISTRIBUTION STRESSES IN THE DIFFERENT FORMS FACES CONDUCTING THE MINING WORKINGS

The methods of analytic researchs of stressed and deformed state of rock mass near the faces, which have flat, spherical and conical forms, conducting the mining workings

1. Краткий обзор и состояние вопроса. Интенсивное развитие механики горных пород, которое отвечало бы современным требованиям горного производства, немыслимо без опережающего развития теоретических методов исследования напряженно-деформированного состояния породного массива.

К настоящему времени выполнено большое число аналитических и экспериментальных исследований, в которых в той или иной мере рассматривались вопросы построения полей напряжений в горных массивах. Существенный вклад в решение этой проблемы внесен советскими учеными А.Н. Динником, К.В. Руппенейтом, Ю.М. Либерманом, Г.Н. Кузнецовым, М.А. Слободовым, Г.Т. Нестеренко, С.А. Батугиным, И.А. Турчаниновым, Г.А. Крупенниковым, а также зарубежными учеными А. Геймом, Ж. Талобром, К. Терцаги, Г. Лиманом и другими.

Горные породы с точки зрения механики – объект сложный и противоречивый. Будучи неоднородными в малом, они достаточно однородны в большом объеме, несмотря на наличие в их структуре газонасыщенных трещин и пор. Поэтому в любой фиксированный момент времени в зависимости от рассматриваемого объема для одной и той же литологической разности могут быть использованы модели либо сплошной гетерогенной газонасыщенной или дисперсной среды. Общие положения теории по исследованию напряженно-деформированного состояния породного массива как двухфазной системы изложены в работах Р.И. Нигматуллина [1], Л.П. Хорошуна и Ю.Н. Подильчука [2]. Полученные на основе таких подходов аналитические зависимости для компонент тензора напряжений и системы разрешающих дифференциальных уравнений при заданных начальных и граничных условиях будут замкнутыми только при известных характеристиках твердой и газовой фаз, а также характеристик пористого скелета, определяемых экспериментально или теоретически из представления состава и структуры скелета породы. Вместе с тем, усложнение модели породного массива приводит к значительным затруднениям в дове-

дении задач до инженерных решений, а корректировка результатов путем введения гипотез о поведении горных пород – к необходимости применения различного рода эмпирических коэффициентов, физическая сущность которых и методы их определения зачастую остаются необъяснимыми.

Современные технологии проведения выработок в газонасыщенном горном массиве включают его дегазацию. Это обстоятельство позволяет упростить модель и свести исследования напряженно-деформированного состояния массива горных пород к решению методами теории деформируемого твердого тела граничных задач, совершенно аналогичных по постановке соответствующим задачам для анизотропной упруго-деформируемой среды, решаемым при отсутствии в массиве трещин и пор. В общем случае анизотропии физико-механические свойства среды характеризуются 21 константой.

Вместе с тем, как показано [3, 4], в зависимости от взаимной ориентировки сети трещин породный массив может рассматриваться как анизотропная среда, деформируемость которой описывается девятью или пятью, реже тринадцатью упругими постоянными. Так, для слоистых осадочных пород, гранитов, некоторых эффузивов и пирокластических преобразований наиболее распространенными являются системные и полигональные типы сети трещин. Породный массив с системной сетью трещин может рассматриваться как ортотропная (девять упругих констант), а массив с полигональной сетью трещин – как трансверсально-изотропная среда (пять упругих констант).

При более сложном распределении ориентировки трещин, породный массив рассматривается как анизотропная среда, деформируемость которой может быть описана тринадцатью упругими константами.

Если установлено, что тип сети трещин представлен трещинами неупорядоченной ориентировки (хаотические сети), то породный массив с такой сетью трещин может рассматриваться как изотропная среда [5].

Так как характер проявления горного давления представляет собой неразрывный процесс упругого деформирования и последующего разупрочнения массива горных пород, то многие исследования в области горной геомеханики описывались методами теории упругого или упругопластического деформируемого твердого тела, теории накопления повреждений или предельного равновесия и др. Среди этих методов, принципиально применяемых для описания напряженно-деформированного состояния горного массива, наибольшее практическое применение получили методы теории упругого и упругопластического деформируемого тела. Это обусловлено тем, что информация о характере напряженно-деформированного состояния уже на стадии упругого деформирования предоставляет возможность разработать методы управления горным давлением на последующих стадиях деформирования и разрушения массива горных пород. Основными типами граничных задач геомеханики являются задачи по исследованию напряженно-деформируемого состояния массива конечных размеров и задачи концентрации напряжений в окрестности капитальных, подготовительных и очистных выработок. В качестве основных в этой области выступают прямые численные методы, метод теории функций

комплексного переменного [6], метод интегральных уравнений [7, 8], методы суперпозиции и однородных решений [9-12].

Первые исследования напряженного состояния горного массива с горизонтальной выработкой, выполненные в рамках плоской задачи механики деформируемого твердого тела, отражены в работах А.И. Динника, А.Б. Моргаевского, Г.Н.Савина [13]. Впоследствии Г.Н.Савин, обобщил формулы А.И. Динника на случай ортотропного массива. Существенный вклад в изучение распределения напряжений вокруг выработок в анизотропном горном массиве внесли С.Г.Лехницкий [14] и А.С. Космодамианский [15-17], который также разработал эффективный подход к решению упругопластических задач для массива, ослабленного рядом круговых выработок.

Л.А.Галин в работе [18] построил точное аналитическое решение задачи об упругопластическом распределении напряжений в плоскости с круговым отверстием. Проявления горного давления, в окрестности очистной выработки исследовалось в работах С.Г. Михлина [19], С.А. Христиановича, Г.И. Баренблата [20], С.В. Кузнецова [21-23], Д.И. Шермана [24].

Наиболее полные исследования напряженно-деформированного состояния породного массива при отработке пластов в угледобывающих шахтах выполнены в работе [25]. Здесь, методом функций комплексного переменного рассмотрены задачи о напряженно-деформированном состоянии анизотропного породного массива, содержащего очистную выработку как в случае пологих так и крутопадающих пластов, установлены основные закономерности деформирования в зависимости от скорости подвигания забоя.

В этих работах изложен анализ широкого круга граничных задач геомеханики в двумерной постановке, который отражает сложившийся к настоящему времени уровень понимания ряда аспектов деформирования породного массива, содержащего выработки различной формы. Следует отметить, что гипотеза о двумерном напряженно-деформируемом состоянии вокруг горных выработок приемлема лишь в случаях протяженных капитальных и подготовительных выработок, когда проходка их уже завершена, либо рассматриваемое сечение находится на достаточно большом расстоянии от фронта ведения горных работ [26].

В зоне ведения горных работ и местах сопряжения горных выработок наблюдается повышенная концентрация напряжений, что приводит ко все более настоятельной необходимости учета пространственного напряженно-деформируемого состояния горного массива. Последнее, как выясняется [27], зачастую предстает в качестве фактора, впоследствии существенно влияющего не только на устойчивость горных выработок, но и на динамические проявления горного давления. Поэтому основной задачей, на которой сосредоточены в последние годы усилия ученых, связанных с практическим применением механики твердого деформируемого тела, является разработка методов исследования напряженно-деформированного состояния в трехмерной постановке. В монографии [28] А.Н. Гузь разработал теорию и исследовал в рамках статического подхода отдельные классы задач устойчивости выработок с уче-

том упругих и упругопластических свойств горных пород, основанную на нелинейной и линеаризированной механике деформируемого твердого тела. В отличие от принятого в нормативных документах определения термина устойчивости горных выработок, как меры деформированности горных пород, определяемой в рамках различных вариантов линейной механики, в указанной работе рассматривается устойчивость состояния равновесия контура горных выработок, когда наряду с основной невозмущенной формой равновесия породного массива возможно существование смежного равновесного состояния при одной и той же внешней нагрузке. Явление потери устойчивости в этой работе предлагается рассматривать в качестве интегрального критерия прочности сильно сжатых участков горных пород с большими градиентами вектора напряжений. Отмечено, что при применении такого критерия неточности постановочного характера, которые имеют место при решении конкретных задач, в меньшей мере оказывают влияние на конечный результат, чем при применении локальных критериев прочности горных пород. Переход из одного равновесного состояния в другое сопровождается развитием больших перемещений и деформаций в приконтурной зоне выработки. В работе И.Ю.Бабича, А.Н.Гузя [29] указано, что это явление может послужить причиной возникновения различных нежелательных горных явлений (внезапных выбросов, горных ударов и т.д.). В работе А.Н. Гузя, В.Н. Чехова [30] в аналогичной линеаризированной постановке развита трехмерная теория складкообразования в слоистой толще горных пород. В работах А.Ф.Булата, В.Н.Чехова [31, 32] дана постановка и предложен подход к исследованию трехмерных линеаризированных задач устойчивости горных пород в призабойной части очистной выработки на больших глубинах залегания полезных ископаемых. Рассмотрено два класса задач: - об устойчивости угольного пласта при действии сжимающего опорного давления переменного характера; - об устойчивости пород почвы и кровли в призабойной зоне при действии вдоль простирания слоев сжимающих тектонических нагрузок и, направленной в ортогональном направлении, реакции взаимодействия крепи с породным массивом.

Некоторые пространственные задачи для анизотропного и газонасыщенного массива горных пород рассмотрены Ю.Н. Подильчуком [33].

Вместе с тем следует отметить, что изучением закономерностей распределения напряжений и разработкой способов их изменения в забоях различных форм применительно к устойчивости выработок практически никто не занимался. Поэтому большое число практически важных вопросов, связанных с формой и скоростью перемещения обнажений при проходке горных выработок остаются открытыми и требуют проведения аналитических исследований в точной трехмерной постановке. Целью настоящего исследования является разработка методики и решение геомеханических задач по определению параметров пространственного напряженно-деформированного состояния массива горных пород в зависимости от формы поверхности забоя и скорости перемещения обнажений в процессе проведения подготовительных выработок на глубоких

горизонтах угольных шахт.

2. Постановка задачи и основные соотношения механики упруго-деформируемого твердого тела. Экспериментальные исследования, выполненные в 80-е годы XX века показали, что с увеличением глубины разработки в породном обнажении имеет место искусственная трещиноватость хаотической ориентации. Анализ полученных данных показал, что искусственная трещиноватость массива горных пород наблюдается на расстоянии от контура выработки до 7,0-7,2 м [34].

Это позволяет существенным образом упростить механическую модель породного массива и рассматривать исследуемый процесс его деформирования в рамках изотропного упруго-деформируемого тела.

Начальные напряжения нетронутого массива горных пород будем характеризовать следующими компонентами [35]:

$$\sigma_{yy}^{(0)} = \gamma y; \quad \sigma_{xx}^{(0)} = \sigma_{yy}^{(0)}; \quad \sigma_{zz}^{(0)} = \lambda \sigma_{yy}^{(0)}, \quad (1)$$

где $\sigma_{yy}^{(0)}$, $\sigma_{xx}^{(0)}$, $\sigma_{zz}^{(0)}$ - компоненты тензора напряжений;

λ - коэффициент бокового распора;

y - глубина рассматриваемой точки массива (Рис. 1).

Рассмотрим напряженно-деформируемое состояние массива горных пород, вмещающего горизонтальную цилиндрическую выработку радиуса h , один из торцов которой $\bar{z} = a$ может подвигаться с некоторой скоростью v положительном направлении оси выработки \bar{z} .

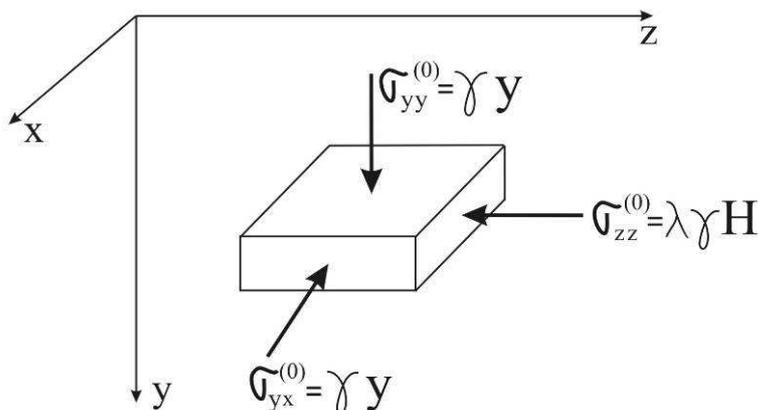


Рис. 1 – Распределение начальных напряжений в массиве горных пород

В процессе решения задачи будем пользоваться цилиндрической системой координат $(\bar{r}, \theta_1, \bar{z})$, начало которой $\bar{z} = 0$ возьмем на равном удалении a от линии забоя подготовительной выработки и ее сопряжения с другой выработкой (Рис. 2). При этом чтобы исключить взаимовлияние торцов выработки на характер напряженно-деформированного состояния в окрестности каждого из них

будем считать, что полудлина выработки $a \gg h$.

Обнаженную поверхность забоя полусферической формы будем описывать при помощи сферических координат \bar{R} и θ .

Начальные напряжения (1) в цилиндрической системе координат примут вид:

$$\sigma_{rr}^{(0)} = \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = -\gamma H; \quad \sigma_{zz}^{(0)} = -\lambda_0 \gamma H; \quad \sigma_{rz} = 0, \quad (2)$$

где H - глубина от земной поверхности до оси подготовительной выработки;

γ - объемный вес толщи горных пород;

λ_0 - коэффициент бокового распора.

Как видно, напряжения в массиве горных пород симметричны относительно оси вращения \bar{z} и не зависят от угловой координаты θ_1 .

При проведении горной выработки полные напряжения

$$\sigma_r = \sigma_{rr} - \gamma H; \quad \sigma_\theta = \sigma_{\theta\theta} - \gamma H; \quad (2.3)$$

$$\sigma_z = \sigma_{zz} - \lambda_0 \gamma H; \quad \tau_{rz} = \sigma_{rz},$$

где σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{zz} и σ_{rz} - дополнительные нормальные и касательные напряжения, обусловленные проведением горной выработки.

При отсутствии крепи полные напряжения на контуре и торце выработки равны нулю, а дополнительные определяются из формул (3).

Изменением начальных напряжений по высоте выработки можно пренебречь, тогда дополнительные напряжения на контуре выработки:

при $\bar{r} = h; \quad -\bar{a} \leq \bar{z} \leq \bar{a}$

$$\sigma_{rr} = \gamma H; \quad \sigma_{rz} = 0. \quad (4)$$

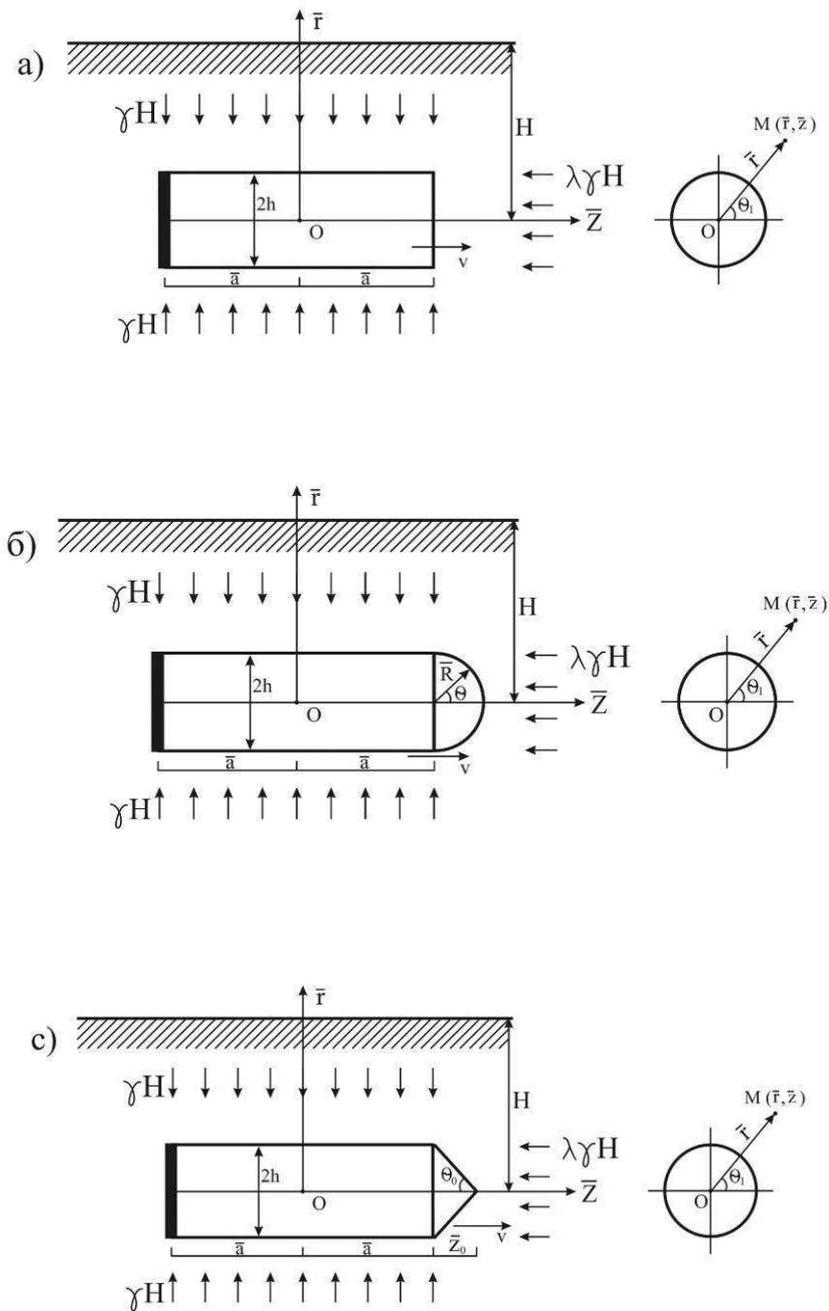
На поверхности забоя:

а) плоская форма:

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \bar{a}; & 0 \leq \bar{r} \leq h \\ \sigma_{zz} &= \lambda_0 \gamma H; & \sigma_{rz} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

б) Сферическая форма

$0 \leq \theta \leq \pi/2;$



$$\theta_0 = \arctg \frac{h}{z_0}$$

- а) плоская форма поверхности забоя;
 б) сферическая форма поверхности забоя;
 с) коническая форма поверхности забоя.

Рис. 2 – Расчетная схема:

$$\left[\begin{array}{l} \sigma_{rr} \sin \theta + \sigma_{rz} \cos \theta \\ r = \sin \theta \\ \bar{z} = a + h \cos \theta \end{array} \right] = \gamma H \sin \theta ; \quad (6)$$

$$\left[\begin{array}{l} \sigma_{rz} \sin \theta + \sigma_{zz} \cos \theta \\ r = h \sin \theta \\ \bar{z} = a + h \cos \theta \end{array} \right] = \lambda_0 \gamma H \cos \theta ;$$

с) Коническая форма

$$\bar{a} \leq \bar{z} \leq \bar{a} + \bar{z}_0 ;$$

$$\left[\begin{array}{l} \sigma_{rr} \sin \theta - \sigma_{rz} \cos \theta \\ r = (\bar{z}_0 + \bar{a} - \bar{z}) \operatorname{tg} \theta_0 \\ \bar{z} = a + h \cos \theta \end{array} \right] = \lambda_0 \gamma H \sin \theta ; \quad (7)$$

$$\left[\begin{array}{l} \sigma_{rz} \sin \theta - \sigma_{zz} \cos \theta \\ r = (\bar{z}_0 + \bar{a} - \bar{z}) \operatorname{tg} \theta_0 \end{array} \right] = -\lambda \gamma H \cos \theta .$$

Задача состоит в определении и исследовании напряженно-деформированного состояния углепородного массива в призабойной зоне с целью выявления основополагающих механических закономерностей, обеспечивающих эффективное и безопасное проведение горных выработок.

Следует отметить, что в трехмерной постановке геомеханических задач, аналогичных со сформулированными выше, рассмотрено небольшое число работ. Как отмечено в [36], анализ напряженного состояния выполнялся лишь для упругого слоя и полупространства с цилиндрическим отверстием. Основная сложность при решении задач о напряженно-деформированном состоянии континуума, содержащего цилиндрическую полость, состоит в том, что при использовании известных решений [37, 38, 39] уравнений равновесия в цилиндрической системе координат нет возможности непосредственно удовлетворять граничным условиям на боковой поверхности и торцах цилиндрической полости.

Так, например, в работе Васильева В.З. [40] задача о напряженном состоянии упругого полупространства вблизи торца цилиндрической выемки сведена к решению сложной контактной задачи для полупространства и слоя с цилиндрической полостью.

Дальнейшие исследования будем осуществлять, введя подвижную систему координат (\bar{r}, \bar{z}) , которая связана с неподвижной системой известным преобразованием Галилея

$$\bar{z} = \bar{z} - vt; \quad \bar{r} = \bar{r}.$$

В этом случае уравнения динамического равновесия массива горных пород [39] примут следующий вид:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \bar{\beta}_1^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] U_r + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 U_z}{\partial r \partial z} = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) U_r + (1-2\nu) \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} + \bar{\beta}_2^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] U_z = 0,$$
(8)

где r и z - безразмерные координаты, $r = \bar{r} h^{-1}$; $z = \bar{z} h^{-1}$;

h - радиус цилиндрической полости;

U_r и U_z - компоненты вектора перемещений соответственно в направлениях \bar{r} и \bar{z} ;

ν - коэффициент Пуассона;

$$\bar{\beta}_1^2 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} - \kappa_1^2; \quad \bar{\beta}_2^2 = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} - \kappa_2^2;$$

$$\kappa_1^2 = \frac{\rho v^2 (1+\nu)(1-2\nu) h^2}{(1-\nu) E}; \quad \kappa_2^2 = \frac{2\rho v^2 (1+\nu)(1-2\nu) h^2}{E},$$

E - модуль Юнга;

ρ - плотность;

v - скорость подвигания забоя.

Нормальные и касательные напряжения σ_{rr} , σ_{zz} и σ_{rz} с помощью функций перемещений выражается так

$$\sigma_{rr} = q_0 \left[\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{U_r}{r} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) \right]; \quad \sigma_{\theta\theta} = q_0 \left[\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) + \frac{U_r}{r} \right];$$

$$\sigma_{zz} = q_0 \left[\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} \right) + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right]; \quad \sigma_{rz} = q_1 \left[\frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r} \right];$$
(9)

$$q_0 = \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} E h^{-1}; \quad q_1 = \frac{E h^{-1}}{2(1+\nu)}.$$

Таким образом, для реализации сформулированной выше проблемы необходимо в первую очередь провести комплекс теоретических по разработке методики уравнений равновесия упруго-деформируемого тела в цилиндрической системе координат с тем, чтобы в процессе исследования поля напряжений в

окрестности забоя выработки использовать уже известные способы решения граничных задач механики упруго-деформируемого твердого тела.

3. Интегрирование уравнений динамического равновесия. Известные общие решения уравнений динамического равновесия в цилиндрической системе координат, где компоненты вектора упругих смещений выражаются через функции, удовлетворяющие скалярным волновым уравнениям [39, 41, 42], не обеспечивают необходимый функциональный произвол для удовлетворения граничных условий на боковой поверхности (4) и торцах горной выработки (5, 6).

В связи с этим необходимо разработать подходы к решению уравнений динамического равновесия (8) в форме, позволяющей строго удовлетворять крайевым условиям на боковой поверхности $\bar{r} = h$ и на торцах в процессе проведения горной выработки.

Решение системы уравнений (8) будем искать в форме:

$$U_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{b - \lambda a}{1 - \lambda b} \frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad U_z = \frac{a - \lambda b}{1 - \lambda c} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \psi - \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (10)$$

где $\varphi(r, z)$ и $\psi(r, z)$ - некоторые функции;

λ, a, b, c - произвольные постоянные.

Подставив выражения (10) в уравнения (8) и сделав соответствующую перегруппировку слагаемых, получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$L_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \omega_1 L_{12} \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0; \quad 2\nu L_{21} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \omega_2 L_{22} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \psi = 0, \quad (11)$$

где L_{ij} ($i, j = 1, 2$) - дифференциальные операторы второго порядка.

$$L_{11} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} - \beta_1^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad L_{12} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} - \beta_1^{-2} \frac{b - \lambda a}{1 - \lambda b} \omega_1^{-1} \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

$$L_{21} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \beta_2^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad L_{22} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} - \omega_0 \omega_2^{-1} \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

$$\beta_1^2 = \frac{\nu}{1 - \nu} + \kappa_1^2; \quad \beta_2^2 = \frac{1 - \nu}{\nu} - \frac{1 - 2\nu}{\nu} \kappa_2^2;$$

$$\omega_1 = \frac{1}{2(1 - \nu)} \frac{a - \lambda b}{1 - \lambda c} - \frac{b - \lambda a}{1 - \lambda b}; \quad \omega_2 = (1 - 2\nu) \frac{a - \lambda b}{1 - \lambda c};$$

$$\omega_0 = \frac{b - \lambda a}{1 - \lambda b} - (1 - 2\nu) \beta_2^{-2} \frac{a - \lambda b}{1 - \lambda c}.$$

Полагая

$$c = \frac{\beta_1^2(1-\lambda b)}{\lambda^2}; \quad a = b \frac{[1-\lambda c + \lambda\beta_1^2(1-\lambda b)]}{\lambda};$$

$$b_{1,2} = \frac{[2\beta_1^2 - \lambda \pm \sqrt{(2\beta_1^2 - \lambda)^2 - 4\beta_1^2(\lambda - \beta_1^2)}]}{2\lambda\beta_1^2}; \quad \beta_1^2 \leq \lambda \leq 1,16\beta_1^2,$$

уравнения (11) представим в таком виде

$$L_{11}\phi_1 = 0; \quad L_{12}\phi_2 = 0 \quad (12)$$

где обозначено

$$\phi_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \omega_1 \frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad \phi_2 = 2\nu \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \omega_2 \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \psi. \quad (2.13)$$

Решение уравнений (2.12) находим, воспользовавшись методом Фурье [43]

$$\phi_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[A_{11}(\alpha)J_1(\alpha\beta_1 r) + B_{11}(\alpha)Y_1(\alpha\beta_1 r) \right] \exp(-i_0\alpha z) d\alpha;$$

$$\phi_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[A_{22}(\alpha)J_0(\alpha\beta_2 r) + B_{22}(\alpha)Y_0(\alpha\beta_2 r) \right] \exp(-i_0\alpha z) d\alpha,$$
(14)

где $A_{jj}(\alpha)$ и $B_{jj}(\alpha)$ ($j=1, 2$) – произвольные функции аргумента α ; $i_0 = \sqrt{-1}$; $J_n(\alpha\beta_j r)$ и $Y_n(\alpha\beta_j r)$, ($n=0, 1$; $j=1, 2$)- функции Бесселя n -го порядка соответственно первого и второго рода.

Внося выражения (14) в равенства (13), получим следующую систему неоднородных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \omega_1 \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[A_{11}(\alpha)J_1(\alpha\beta_1 r) + B_{11}(\alpha)Y_1(\alpha\beta_1 r) \right] \exp(-i_0\alpha z) d\alpha;$$

$$2\nu \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \omega_2 \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \psi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[A_{22}(\alpha)J_0(\alpha\beta_2 r) + B_{11}(\alpha)Y_0(\alpha\beta_2 r) \right] \exp(-i_0\alpha z) d\alpha.$$
(15)

Поочередно исключая в (15) функции φ и ψ и учитывая следующие свойства функций Бесселя [44]

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[J_1(\alpha r) \right] = \alpha J_0(\alpha r) - \frac{1}{r} J_1(\alpha r); \quad \frac{\partial}{\partial r} \left[Y_1(\alpha r) \right] = \alpha Y_0(\alpha r) - \frac{1}{r} Y_1(\alpha r);$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[J_0(\alpha r) \right] = -\alpha J_1(\alpha r); \quad \frac{\partial}{\partial r} \left[Y_0(\alpha r) \right] = -\alpha Y_1(\alpha r),$$

приходим к двум неоднородным дифференциальным уравнениям относительно искомых функций $\varphi(r, z)$ и $\psi(r, z)$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - 2\nu \frac{\omega_1}{\omega_2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \alpha \beta_1 A_{11}(\alpha) J_0(\alpha \beta_1 r) + \alpha \beta_1 B_{11}(\alpha) Y_0(\alpha \beta_1 r) - \right.$$

$$\left. - i_0 \alpha \frac{\omega_1}{\omega_2} \left[A_{22}(\alpha) J_0(\alpha \beta_2 r) + B_{22}(\alpha) Y_0(\alpha \beta_2 r) \right] \right\} \exp(-i_0 \alpha z) d\alpha$$
(16)

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} - 2\nu \frac{\omega_1}{\omega_2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \psi = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\alpha \beta_2}{\omega_2} \left[A_{22}(\alpha) J_1(\alpha \beta_2 r) + B_{22}(\alpha) Y_1(\alpha \beta_2 r) \right] + \right.$$

$$\left. + i_0 \alpha_0 \frac{2\nu}{\omega_2} \left[A_{11}(\alpha) J_1(\alpha \beta_1 r) + B_{11}(\alpha) Y_1(\alpha \beta_1 r) \right] \right\} \exp(-i_0 \alpha z) d\alpha.$$

Решение этих уравнений, как известно, разыскивается в виде суммы

$$\varphi = \bar{\varphi} + \bar{\bar{\varphi}}; \quad \psi = \bar{\psi} + \bar{\bar{\psi}},$$
(17)

где обозначено $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ - общие решения однородных, а $\bar{\bar{\varphi}}$ и $\bar{\bar{\psi}}$ - частные решения соответствующих неоднородных уравнений (2.16).

Однородные решения находим, как и выше методом разделения переменных, а неоднородные решения возьмем в такой форме

$$\bar{\bar{\varphi}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\alpha^{-1} \beta_1}{\beta_3^2 - \beta_1^2} \left[A_{11}(\alpha) J_0(\alpha \beta_1 r) + B_{11}(\alpha) Y_0(\alpha \beta_1 r) \right] - \right.$$

$$\left. - i_0 \alpha^{-1} \frac{\omega_1}{\omega_2 (\beta_3^2 - \beta_2^2)} \left[A_{22}(\alpha) J_0(\alpha \beta_2 r) + B_{22}(\alpha) Y_0(\alpha \beta_2 r) \right] \right\} \exp(-i_0 \alpha z) d\alpha;$$
(18)

$$\bar{\bar{\psi}} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\alpha^{-1} \beta_2}{\omega_2 (\beta_3^2 - \beta_2^2)} \left[A_{22}(\alpha) J_1(\alpha \beta_2 r) + B_{22}(\alpha) Y_1(\alpha \beta_2 r) \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{2i_0 \alpha^{-1} \nu}{\omega_2 (\beta_3^2 - \beta_1^2)} \left[A_{11}(\alpha) J_1(\alpha \beta_1 r) + B_{11}(\alpha) Y_1(\alpha \beta_1 r) \right] \right\} \exp(-i_0 \alpha z) d\alpha.$$

В результате аналитические зависимости для функций φ и ψ , описываемых уравнениями (16), запишем в таком виде

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\alpha^{-1}\beta_1}{\beta_3^2 - \beta_1^2} \left[A_{11}(\alpha)J_0(\alpha\beta_1 r) + B_{11}(\alpha)Y_0(\alpha\beta_1 r) \right] - \right. \\ & - \frac{i_0\alpha^{-1}\omega_1}{\omega_2(\beta_{3K}^2 - \beta_2^2)} \left[A_{22}(\alpha)J_0(\alpha\beta_2 r) + B_{22}(\alpha)Y_0(\alpha\beta_2 r) \right] + \\ & \left. + A_{12}(\alpha)J_0(\alpha\beta_3 r) + B_{12}(\alpha)Y_0(\alpha\beta_3 r) \right\} \exp(-i_0\alpha z) d\alpha; \\ \psi = & -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\alpha^{-1}\beta_2}{\omega_2(\beta_3^2 - \beta_2^2)} \left[A_{22}(\alpha)J_1(\alpha\beta_2 r) + B_{22}(\alpha)Y_1(\alpha\beta_2 r) \right] + \right. \\ & + \frac{2i_0\alpha^{-1}\nu}{\omega_2(\beta_3^2 - \beta_1^2)} \left[A_{11}(\alpha)J_1(\alpha\beta_1 r) + B_{11}(\alpha)Y_1(\alpha\beta_1 r) \right] - \\ & \left. - [A_{21}(\alpha)J_1(\alpha\beta_3 r) - B_{21}(\alpha)Y_1(\alpha\beta_3 r)] \right\} \exp(-i_0\alpha z) d\alpha; \end{aligned} \quad (19)$$

$$\beta_3 = \sqrt{2\nu\omega_1 / \omega_2}.$$

Принимая во внимание особенности поведения функций Бесселя первого и второго рода, окончательные выражения для искомым функций перемещений U_r и U_z запишем на основании формул (10) и (19)

$$\begin{aligned} U_r = & -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\omega_3 A_{11}(\alpha)J_1(\alpha\beta_1 r) + i_0\omega_4 A_{22}(\alpha)J_1(\alpha\beta_2 r) + \right. \\ & \left. + \alpha\beta_3 A_{12}(\alpha)J_1(\alpha\beta_3 r) + i_0\alpha \frac{b - \lambda a}{1 - \lambda b} A_{21}(\alpha)J_1(\alpha\beta_3 r) \right] \exp(-i_0\alpha z) d\alpha; \\ \omega_3 = & \left[\beta_1^2 \omega_2 - 2\nu \frac{b - \lambda a}{1 - \lambda b} \right] \omega_2^{-1} (\beta_3^2 - \beta_1^2)^{-1}; \\ \omega_4 = & \beta_2 \left[\omega_1 + \frac{b - \lambda a}{1 - \lambda b} \right] \omega_2^{-1} (\beta_3^2 - \beta_1^2)^{-1}; \\ U_z = & \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \left[i_0\omega_5 A_{11}(\alpha)J_0(\alpha\beta_1 r) + \omega_6 A_{22}(\alpha)J_0(\alpha\beta_2 r) + \right. \\ & \left. + \alpha\beta_3 \frac{a - \lambda b}{1 - \lambda c} A_{21}(\alpha)J_0(\alpha\beta_3 r) - i_0\alpha A_{12}(\alpha)J_0(\alpha\beta_3 r) \right] \exp(-i_0\alpha z) d\alpha; \end{aligned} \quad (20)$$

$$\omega_5 = \beta_1 \left(2\nu \frac{a - \lambda b}{1 - \lambda c} - \omega_2 \right) \omega_1^{-1} (\beta_3^2 - \beta_1^2)^{-1};$$

$$\omega_6 = \left(\omega_1 - \beta_2^2 \frac{a - \lambda b}{1 - \lambda c} \right) \omega_2^{-1} (\beta_3^2 - \beta_1^2)^{-1}.$$

Следует отметить, что за счет выбора констант λ и b ($\beta_1^2 \leq \lambda \leq 1,16\beta_1^2$) найденные решения уравнений динамического равновесия (8) имеют достаточный функциональный произвол для решения сформулированных выше граничных задач механики горных пород.

Аналитические зависимости для компонент тензора напряжений получаем при помощи формул (8) и (20).

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = & \frac{q_0}{2\pi} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ A_{11}(\alpha) \left[\frac{\omega_3}{r} \frac{1-2\nu}{1-\nu} J_1(\alpha\beta_1 r) - \alpha \left(\beta_1 \omega_3 - \frac{\nu}{1-\nu} \omega_5 \right) J_0(\alpha\beta_1 r) \right] + \right. \\ & + i_0 A_{22}(\alpha) \left[\frac{\omega_4}{r} \frac{1-2\nu}{1-\nu} J_1(\alpha\beta_2 r) - \alpha \left(\beta_2 \omega_4 + \frac{\nu}{1-\nu} \omega_6 \right) J_0(\alpha\beta_2 r) \right] + \\ & + A_{12}(\alpha) \alpha \left[\frac{\beta_3}{r} \frac{1-2\nu}{1-\nu} J_1(\alpha\beta_3 r) - \alpha \left(\beta_3^2 + \frac{\nu}{1-\nu} \right) J_0(\alpha\beta_3 r) \right] + \\ & \left. + i_0 A_{21}(\alpha) \alpha \left[\frac{b - \lambda a}{1 - \lambda b} \frac{1-2\nu}{(1-\nu)r} J_1(\alpha\beta_3 r) - \alpha \beta_3 \left(\frac{a - \lambda b}{1 - \lambda c} \frac{\nu}{1-\nu} + \frac{b - \lambda a}{1 - \lambda b} \right) J_0(\alpha\beta_3 r) \right] \right\} \exp(-i_0 \alpha z) d\alpha; \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} = & -\frac{q_0}{2\pi} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ A_{11}(\alpha) \left[\frac{\omega_3}{r} \frac{1}{1-\nu} J_1(\alpha\beta_1 r) + \alpha \left(\beta_1 \omega_3 - \omega_5 \right) \frac{\nu}{1-\nu} J_0(\alpha\beta_1 r) \right] + \right. \\ & = i_0 A_{22}(\alpha) \left[\frac{\omega_4}{r} \frac{1-2\nu}{1-\nu} J_1(\alpha\beta_2 r) + \alpha \frac{\nu}{1-\nu} \left(\omega_4 \beta_2 + \omega_6 \right) J_0(\alpha\beta_2 r) \right] + \\ & + A_{12}(\alpha) \alpha \left[\frac{\beta_3}{r} \frac{1-2\nu}{1-\nu} J_1(\alpha\beta_3 r) + \alpha \frac{\nu}{1-\nu} \left(\beta_3^2 + 1 \right) J_0(\alpha\beta_3 r) \right] + i_0 A_{21}(\alpha) \alpha \times \\ & \left. \times \left[\frac{b - \lambda a}{1 - \lambda b} \frac{1-2\nu}{(1-\nu)r} J_1(\alpha\beta_3 r) + \alpha \beta_3 \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{a - \lambda b}{1 - \lambda c} + \frac{b - \lambda a}{1 - \lambda b} \right) J_0(\alpha\beta_3 r) \right] \right\} \exp(-i_0 \alpha z) d\alpha; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} = & -\frac{q_0}{2\pi} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ A_{11}(\alpha) \alpha \left[\frac{\nu}{1-\nu} \beta_1 \omega_3 - \omega_5 \right] J_0(\alpha\beta_1 r) - \right. \\ & - i_0 \alpha A_{22}(\alpha) \left[\frac{\nu}{1-\nu} \beta_2 \omega_4 + \omega_6 \right] J_0(\alpha\beta_2 r) \left. \right] + A_{12}(\alpha) \alpha^2 \left[\frac{\nu}{1-\nu} \beta_3^2 + 1 \right] J_0(\alpha\beta_3 r) + \\ & + i_0 A_{21}(\alpha) \alpha^2 \beta_3 \left[\frac{\nu}{1-\nu} \frac{b - \lambda a}{1 - \lambda b} + \frac{a - \lambda b}{1 - \lambda c} \right] J_0(\alpha\beta_3 r) \left. \right\} \exp(-i_0 \alpha z) d\alpha; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rz} = & \frac{q_1}{2\pi} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ i_0 A_{11}(\alpha) \alpha \left(\omega_3 - \omega_5 \beta_1 \right) J_1(\alpha \beta_1 r) + \right. \\ & + A_{22}(\alpha) \alpha \left(\omega_4 - \omega_6 \beta_2 \right) J_1(\alpha \beta_2 r) + 2i_0 A_{12}(\alpha) \alpha^2 \beta_3 J_1(\alpha \beta_3 r) + \\ & \left. + A_{21}(\alpha) \alpha^2 \left(\frac{b - \lambda a}{1 - \lambda b} - \beta_3^2 \frac{a - \lambda b}{1 - \lambda c} \right) J_1(\alpha \beta_3 r) \right\} \exp(-i_0 \alpha z) d\alpha. \end{aligned}$$

Далее, внося соответствующие аналитические зависимости компонент тензора напряжений (21) в условиях на контуре выработки (4)-(6), определение неизвестных функций $A_{ij}(\alpha)$ ($i, j = 1, 2$) и вычисление неопределенных интегралов (21) осуществляется по стандартным схемам решения граничных задач методами интегральных преобразований [8, 41, 43].

ЛИТЕРАТУРА

1. Нигматуллин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. – М.: Наука, 1978. – 278 с.
2. Хорошун Л.П., Подильчук Ю.Н. О представлении уравнений статики двухкомпонентных смесей // Прикл. Механика. – 1981. – Т. 17, № 4. – С. 16-23.
3. Беликов Б.П., Александров К.С., Рыжова Т.В. Упругие свойства породообразующих минералов и горных пород. – М.: Наука, 1968.
4. Справочник физических констант горных пород / Под ред. С.Кларка. – М.: Мир, 1969. – 542 с.
5. Руппенейт К.В. Деформируемость трещиноватых горных пород. – М.: Недра, 1975. – 224 с.
6. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
7. Снеддон И. Преобразования Фурье. – М.: Изд-во иностр. лит., 1955. – 667 с.
8. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Л.: Наука, 1967. – 402 с.
9. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф. Пространственные задачи теории упругости и пластичности. – Киев, Наук. думка, 1985. – Т. 3. – С. 280.
10. Байда Э.Н. Некоторые пространственные задачи теории упругости. – Л.: Изд-во Ленингр. университета, 1983. – 231 с.
11. Прокопов В.К. Обзор работ по однородным решениям теории упругости и их приложениям // Тр. Ленингр. политехн. ин-та. – 1967. – № 279. – С. 31-46.
12. Космодамианский А.С. Пространственные задачи теории упругости для многосвязных пластин // Прикл. Механика. – 1983. – 19, № 12. – С. 3-21.
13. Динник А.Н., Моргаевский В.Б., Савин Г.Н. Распределение напряжений вокруг подземных горных выработок // Труды совещания по управлению горным давлением. – М.-Л.: АН СССР, 1938. – С. 7-55.
14. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. – М.-Л.: Гостехиздат, 1947. – 335 с.
15. Космодамианский А.С. Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами и выступами. – Киев: Вища школа, 1975. – 225 с.
16. Космодамианский А.С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями. – Киев-Донецк: Вища школа, 1976. – 200 с.
17. Космодамианский А.С., Шалдырван В.А. Толстые многосвязные пластины. – Киев: Наук. думка, 1978. – 240 с.
18. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – М.: Наука, 1980. – 380 с.
19. Михлин С.Г. О напряжениях в породе над угольных пластом. – Изв. АН СССР, отдел техн. Наук. – 1942. – № 7-8. – С. 13-29.
20. Христианович С.А. Механика сплошной среды. – М.: Наука, 1981. – 483 с.
21. Кузнецов С.В. Некоторые закономерности и соотношения, определяющие посадку лавы // Физ.-техн. пробл. разраб. полезн. Ископаемых. – 1965. – № 5. – С. 3-19.
22. Кузнецов С.В. Влияние касательных напряжений на контактной поверхности пласта и породы на напряженное состояние горного массива // Физ.-техн. пробл. разраб. полезн. Ископаемых. – 1969. – № 5. – С. 10-20.
23. Кузнецов С.В. Общие закономерности, характерные особенности перераспределения напряжений в массивах горных пород при развитии выработанного пространства // Физ.-техн. пробл. разраб. полезн. Ископаемых. – 1988. – № 6. – С. 18-31.

24. Шерман Д.И. Упругая весомая полуплоскость, ослабленная отверстием эллиптической формы, достаточно близко расположенным от ее границы // Пробл. механики сплошной среды. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – С. 527-563.
25. Булат А.Ф., Витушко О.В., Гоман О.Г. Напряженно-деформированное состояние анизотропного породного массива при отработке угольных пластов. - Днепропетровск: ИГТМ НАН Украины, 2000. – 216 с.
26. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. – Киев: Наук. думка, 1968. – 888 с.
27. Гузь А.Н. О задачах устойчивости в механике горных пород // Проблемные вопросы механики горных пород. - Алма-Ата: Наука, 1972.
28. Гузь А.Н. Основы теории устойчивости горных выработок. – Киев: Наук. думка, 1977. – 204 с.
29. Бабич И.Ю., Гузь А.Н. Потеря устойчивости, как возможный механизм образования выбросов // Прикл. механика. – 1977. – 13, № 5. – С. 19-23.
30. Гузь А.Н., Чехов В.Н. Линеаризованная теория складкообразования в толще земной коры // Прикл. механика. – 1975. – № 1. – С. 3-17.
31. Булат А.Ф., Чехов В.Н. Задачи устойчивости боковых пород при отработке угольных пластов на больших глубинах // Прикл. механика. – 1992. – № 12. – С. 24-31.
32. Булат А.Ф., Чехов В.Н. Трехмерные задачи устойчивости боковых пород в окрестности очистной выработки при управлении НДС массива // Прикл. механика. – 1994. – № 8. – С. 42-48.
33. Подильчук Ю.Н. Пространственные задачи механики горных пород. – Киев: Наук. Думка, 1983. – 158 с.
34. Усаченко Б.М., Кириченко В.Я., Шмиголь А.В. Охрана подготовительных выработок глубоких горизонтов шахт Западного Донбасса. – М.: ЦНИЭИ уголь, 1992. – 168 с.
35. Крупенников Г.А. и др. Распределение напряжений в породных массивах. – М.: Недра, 1972. – 143 с.
36. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечны размеров. – Киев: Наук. думка, 1978. – 264 с.
37. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 415 с.
38. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. – М.: Гостехиздат, 1955. – 491 с.
39. Ляв А. Математическая теория упругости. – М.-Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935. – 674 с.
40. Васильев В.З. Напряжения в упругом изотропном полупространстве вблизи торца вертикальной цилиндрической выемки // Прикл. механика. – 1967. – 3, 7. – с. 107-117.
41. Снеддон И. Преобразования Фурье. – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1955. – 668 с.
42. Перепелица В.Г., Коломиец А.Н., Шматовский Л.Д. Решение задачи о напряженно-деформированном состоянии горного массива при его гидроразрыве [Текст] // Доповіді НАН України. – 2006. - № 12. – С. 44-51.
43. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970. – 708 с.
44. Ватсон Г.Н. Теория Бесселевых функций. – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1949. – 798 с.