

Л.Я. Локшина, науч. сотр.,
Ю.А. Костандов, вед., науч. сотр.
(Таврический национальный университет),
Д.Л. Васильев, гл. техн.
(ИГТМ НАН Украины)

РАСЧЕТ ПРЕДЕЛА ПРОЧНОСТИ ХРУПКИХ МАТЕРИАЛОВ С УЧЕТОМ ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ

Досліджується напружено-деформований стан зразка матеріалу при одноосному стисненні з урахуванням внутрішнього тертя матеріалу. Встановлено вплив внутрішнього тертя на опірність матеріалу зрушенню і вид траєкторії максимальних дотичних напружень. Отримано рівняння стану матеріалу на траєкторії максимальних дотичних напружень й рівняння для розрахунку межі міцності матеріалу з урахуванням внутрішнього тертя.

CALCULATION OF AN ULTIMATE COMPRESSIVE OF BRITTLE MATERIALS TAKING INTO ACCOUNT INTERNAL FRICTION

The stress-strain state of the sample of material at the uniaxial compression taking into account the internal friction of material is researched. Influence of internal friction on a destruction resistibility of material and an aspect of a trajectory of maximum tangential stresses is established. The equation of a state of a material on a trajectory of maximum tangential stresses and the equation for calculation of limit of material strength taking into account an internal friction is obtained.

К настоящему времени сложилось несколько подходов к трактовке процесса разрушения твердых тел. В одних из них твердое тело считается разрушенным, причем мгновенно, при выполнении некоторых условий, называемых критериями разрушения, налагаемых на характеристики его напряженно-деформированного состояния (НДС), например, на одно из главных напряжений или их комбинацию [1]. В других разрушение материала связывают с образованием и развитием магистральной трещины, что естественно приводит к иным условиям, приводящим к разрушению тела как единого целого [2]. В третьих полагается, что причиной хрупкого и квазихрупкого разрушения является тепловое колебательное движение атомов, а приложенная к межатомным связям механическая нагрузка лишь активизирует, либо затрудняет этот процесс [3]. Однако ни одна из этих и иных существующих моделей разрушения не в состоянии объяснить различия до 30 раз в значениях прочности хрупких материалов на одноосное сжатие и растяжение. Кроме того, ни одна из них не учитывает влияния внешнего нагружения на проявление характеристик материала, участвующих в формировании его НДС. Настоящая работа является шагом в построении модели хрупкого разрушения, способной устранить эти недостатки.

В настоящей работе принимается, что разрушение материала начинается при его деформировании за пределом упругости в некоторой локальной области. Дальнейшее нагружение приводит к тому, что в одних областях происходит разрушение материала, в то время как в других он продолжает нахо-

даться в не разрушенном упругом состоянии. При этом считаем, что формирование очагов разрушения в локальных областях происходит на траекториях максимальных эффективных касательных напряжений (ТМЭКН) [4]. Под понятием эффективного касательного напряжения τ_e понимается активное касательное напряжение τ_a за вычетом фрикционной составляющей. Для математического описания равновесия на ТМЭКН используется критерий Кулона

$$\tau_e = \tau_a - \mu\sigma_n \leq k, \quad (1)$$

где τ_e - эффективное касательное напряжение на ТМЭКН; τ_a - активное касательное напряжение на ТМЭКН; μ - коэффициент внутреннего трения материала; σ_n - нормальное напряжение на ТМЭКН; k - предельная сопротивляемость материала сдвигу.

Критерий (1) означает, что при $\tau_e = k$ происходит разрушение, а при $\tau_e < k$ материал находится в упругом состоянии.

Рассмотрим образец горной породы шириной l и высотой h при сжатии вдоль оси Y . Поскольку нагружение и деформирование образца симметрично относительно его продольной оси, то будем рассматривать только левую половину образца. Проведем ТМЭКН ab в виде произвольной кривой и касательные к ней в точках a и b (рис. 1).

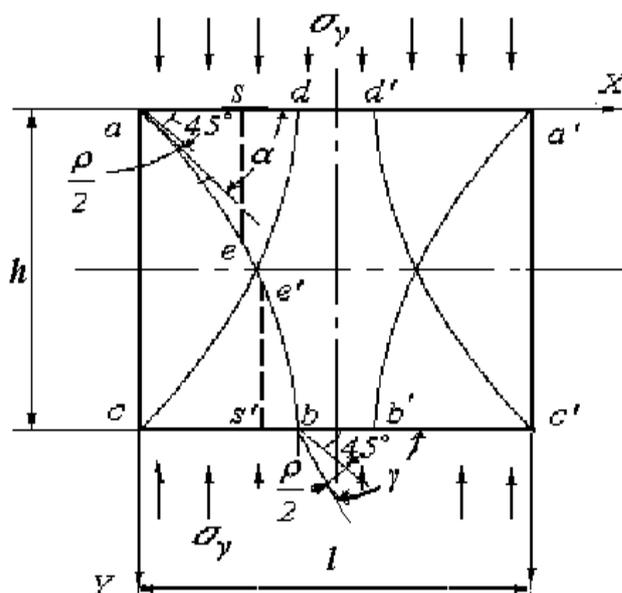


Рис. 1 – Схема расположения ТМЭКМ в образце горной породы при одноосном сжатии

Рассмотрим равновесие двух треугольников aes и bes , формируемых ТМЭКН ab и горизонтальными поверхностями образца.

Найдем математическую связь между нормальными и касательными напряжениями через углы наклона α и γ к оси X касательных к ТМЭКН ae и be соответственно.

Рассмотрим силы, приложенные к верхнему треугольнику aes , и спроецируем их на площадку ТМЭКН и нормаль ON , как показано на (рис.2). В результате суммирования проекций сил получим

$$\sigma_{\alpha} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \cos 2\alpha \quad (2)$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \sin 2\alpha . \quad (3)$$

Подставим выражения (2) и (3) в выражение (1) и получим выражение для эффективного касательного напряжения τ_{α} в верхнем треугольнике aes :

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \mu \left(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \cos 2\alpha \right) \quad (4)$$

Найдем угол наклона касательной α , при котором эффективное касательное напряжение будет иметь максимальное значение. Для этого найдем производную $\frac{\partial \tau_{\alpha}}{\partial \alpha}$ и приравняем ее нулю:

$$\frac{\partial \tau_{\alpha}}{\partial \alpha} = (\sigma_x + \sigma_y) \cos 2\alpha + \mu(\sigma_x + \sigma_y) \sin 2\alpha ;$$

$$(\sigma_x + \sigma_y)(\cos 2\alpha + \mu \sin 2\alpha) = 0.$$

Получаем:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{1}{\mu} . \quad (5)$$

Рассмотрим силы, приложенные к нижнему треугольнику bes , и спроецируем их на площадку ТМЭКН и нормаль ON (рис. 2). В результате суммирования проекций получим

$$\sigma_{\gamma} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\gamma \quad (6)$$

$$\tau_{\gamma} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\gamma \quad (7)$$

Подставим выражения (6) и (7) в выражение (1) и получим выражение для эффективного касательного напряжения в нижнем треугольнике $be s$:

$$\tau_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\gamma - \mu \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\gamma \right). \quad (8)$$

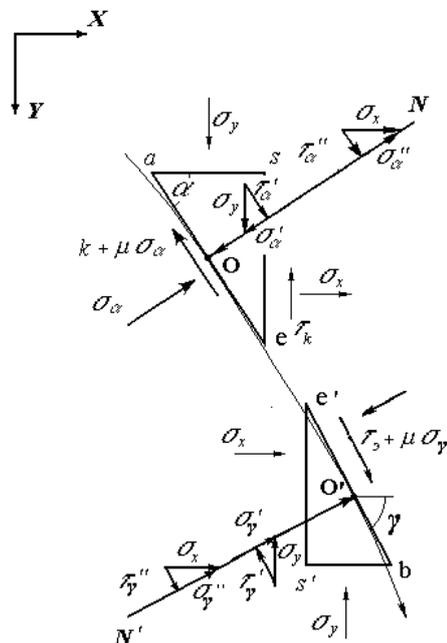


Рис. 2 – Равновесные треугольники на траектории максимальных касательных напряжений

По аналогии найдем угол наклона касательной γ для нижнего треугольника $be s$, при котором эффективное касательное напряжение будет иметь максимальное значение.

$$\frac{\partial \tau_s}{\partial \gamma} = -(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\gamma - \mu(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\gamma ;$$

$$(\sigma_x - \sigma_y)(-\cos 2\gamma - \mu \sin 2\gamma) = 0.$$

Получим

$$\operatorname{tg} 2\gamma = -\frac{1}{\mu}. \quad (9)$$

Из анализа выражений (5) и (9), можно сделать вывод, что углы наклона касательной к ТМЭКН в точках a и b равны, то есть $\alpha = \gamma$. Следовательно, ТМЭКН является прямой.

Поскольку

$$\mu = \operatorname{tg} \rho, \quad (10)$$

где ρ - угол внутреннего трения материала, то из (5) следует $\operatorname{tg} 2\alpha = -\operatorname{ctg} \rho$ или $\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} - 2\alpha) = -\operatorname{ctg} \rho$ и для угла α получаем $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2}$.

Из этого следует, что учет внутреннего трения материала приводит, во-первых, к увеличению угла наклона ТМЭКН относительно оси X , а следовательно, к уменьшению поверхности разрушения, и, во-вторых, к увеличению сопротивляемости материала.

Выразим $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ через угол внутреннего трения ρ

$$\sin 2\alpha = \cos \rho, \quad (11)$$

$$\cos 2\alpha = -\sin \rho. \quad (12)$$

Найдем σ_α , τ_α и τ_s для верхнего треугольника aes . Подставляя выражения (11) и (12) в выражения (2) - (4) и произведя преобразования, получаем

$$\sigma_\alpha = -\frac{1}{2}\sigma_x(1 + \sin \rho) + \frac{1}{2}\sigma_y(1 - \sin \rho), \quad (13)$$

$$\tau_\alpha = \frac{1}{2}\sigma_x \cos \rho + \frac{1}{2}\sigma_y \cos \rho, \quad (14)$$

$$\tau_s = \frac{1}{2\cos \rho}[\sigma_x(1 + \sin \rho) + \sigma_y(1 - \sin \rho)].$$

Теперь найдем σ_γ , τ_γ и τ_s для нижнего треугольника bes . Подставляя выражения (11) и (12) в выражения (6) - (8) и произведя преобразования, получаем

$$\sigma_\gamma = \frac{1}{2}\sigma_x(1 + \sin \rho) + \frac{1}{2}\sigma_y(1 - \sin \rho), \quad (15)$$

$$\tau_\gamma = -\frac{1}{2}\sigma_x \cos \rho + \frac{1}{2}\sigma_y \cos \rho, \quad (16)$$

$$\tau_s = \frac{1}{2\cos \rho}[-\sigma_x(1 + \sin \rho) + \sigma_y(1 - \sin \rho)]. \quad (17)$$

Продифференцируем по α уравнение (2):

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -(\sigma_x + \sigma_y) \sin 2\alpha.$$

С учетом выражения (3) можем записать

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -2\tau_\alpha.$$

Подставляя в это уравнение критерий Кулона (1), получим важное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -2(\tau_s + \mu\sigma_\alpha). \quad (18)$$

Аналогично поступим с выражением напряжения σ_γ для нижнего треугольника $be s$ и получим

$$\frac{d\sigma_\gamma}{d\gamma} = -2\tau_\gamma$$

или

$$\frac{d\sigma_\gamma}{d\gamma} = -2(\tau_s + \mu\sigma_\gamma). \quad (19)$$

Каждое из уравнений (18) и (19) является уравнением состояния материала на ТМЭКН. Их решение сводится к интегрированию на ТМКЭН между точками a и b

$$\int_a^b \frac{d\sigma_\alpha}{(\tau_s + \mu\sigma_\alpha)} = -2 \int_a^b d\alpha.$$

Откуда

$$\ln(\tau_s + \mu\sigma_\alpha)|_a^b = -2\mu\alpha|_a^b.$$

Из выражений (14) и (16) очевидно, что $\tau_\alpha > \tau_\gamma$. Поэтому, условие $\tau_s = k$, что соответствует разрушению материала, достигается в треугольнике aes раньше чем в треугольнике $be s$. Это соответствует экспериментальным данным и практическим наблюдениям: разрушение образца начинается из угла. Будет справедливым записать для точки a $\tau_s = k$. С учетом этого получаем:

$$\ln(\tau_s + \mu\sigma_\gamma) - \ln(k + \mu\sigma_\alpha) = -2\mu(\gamma - \alpha).$$

Поскольку $\alpha = \gamma$, то после несложных преобразований, получим:

$$\ln \frac{(\tau_s + \mu\sigma_\gamma)}{(k + \mu\sigma_\alpha)} = 0,$$

и, следовательно,

$$\frac{(\tau_s + \mu\sigma_\gamma)}{(k + \mu\sigma_\alpha)} = 1. \quad (20)$$

В точке a $\sigma_x = 0$. С учетом этого из выражения (13) найдем σ_α в точке a

$$\sigma_\alpha = \frac{1}{2}\sigma_y(1 - \sin \rho). \quad (21)$$

Найдем σ_x в точке b из выражения (17)

$$\sigma_x = \frac{\sigma_y(1 - \sin \rho) - 2\tau_s \cos \rho}{(1 + \sin \rho)}. \quad (22)$$

Подставляя выражения для σ_α , σ_γ и σ_x из (21), (15) и (22) соответственно в выражение (20) и осуществляя ряд преобразований, получаем

$$\sigma_y = \frac{2k - 2\tau_s(1 - \sin \rho)}{\mu(1 - \sin \rho)}, \quad (23)$$

Уравнение (23) используется для расчета предела прочности материала с учетом внутреннего трения. При этом ищется пара значений σ_y и τ_s , для которой выполняется критерий разрушения Кулона.

Для сравнения с результатами, получаемыми без учета внутреннего трения, рассмотрим частный случай, когда $\mu = 0$ и, следовательно, $\rho = 0$. Выразив τ_s из уравнения (23), получаем:

$$\tau_s = k. \quad (24)$$

Выполнив предельный переход при $\rho \rightarrow 0$ в уравнении (23), с учетом (24) получаем:

$$\sigma_y = 2k. \quad (25)$$

Выражения (24) и (25) совпадают с результатами [5].

Таким образом, используя полученные результаты, можно определить

разрушающее нормальное напряжение в угловых областях образца.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Качанов, Л.М. Основы механики разрушения / Л.М. Качанов. – М.: Наука, 1974. – 312 с.
2. Слепьян, Л.И. Механика трещин / Л.И. Слепьян. – Л.: Судостроение, 1990.-296 с.
3. Бартенев, Г.М. Прочность и механизм разрушения полимеров / Г.М. Бартенев. – М.: Химия,1984. – 280 с.
4. Васильев, Л.М. Метод расчёта предела прочности горных пород на одноосное сжатие при линейной связи между контактными напряжениями / Л.М. Васильев, Д.Л. Васильев // Геотехническая механика : Межвед. сб. науч. тр. / ИГТМ НАН Украины. – Днепропетровск, 2003. – Вып. 42. – С. 73–80.
5. Качанов, Л.М. Основы теории пластичности / Л.М. Качанов. – М.: Наука, 1969. – 419 с.

Рекомендовано до публікації д.т.н. С.П. Міньєвим 18.08.09.