

Л.М. Васильев, д.т.н.,
Д.Л. Васильев, к.т.н.,
Р.Н. Наривский, вед. инж.
(ИГТМ НАН Украины),
А.А. Потапенко, инж.
(ОАО "Краснодонуголь")

МЕТОД РАСЧЕТА ПРЕДЕЛА ПРОЧНОСТИ ПРИ ТРЕХОСНОМ СЖАТИИ ОБРАЗЦОВ ГОРНЫХ ПОРОД И ПОСТОЯННОМ ЗНАЧЕНИИ КОНТАКТНЫХ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Запропоновано метод розрахунку межі міцності при тривісному стисканні зразків гірських порід і постійному значенні контактних дотичних напруг. Метод заснований на теорії граничного стану гірських порід в локальних областях.

THE METHOD OF CALCULATION OF ULTIMATE STRENGTH AT TRIAxIAL COMPRESSION OF ROCK SAMPLES AND CONSTANT VALUE OF CONTACT TANGENT TENSIONS

The method of calculation of ultimate strength at the triaxial compression of rock samples and constant value of contact tangent tensions is offered. A method is based on the theory of the maximum state of rock in local regions.

В работе [1] разработан метод расчета предела прочности на сжатие образцов горных пород при линейной связи между контактными касательными τ_k и нормальными напряжениями σ_y согласно закону Кулона-Амонтона

$$\tau_k = f\sigma_y, \quad (1)$$

где f – коэффициент внешнего (контактного) трения.

При использовании этого закона возникают непреодолимые трудности точного интегрирования двух известных дифференциальных уравнений совместно с алгебраическим уравнением равновесия. Разработанные методы предела прочности материала, основанные на этом принципе, не позволяют определять напряжения внутри материала [2]. Решение имеет место только в частном случае, когда поперечные напряжения σ_x равны продольным нормальным напряжениям σ_y , и $d\sigma_y = d\sigma_x$, что и было использовано в работе [1]. В связи с этим авторы статьи [3] провели анализ о правомочности применения упомянутого закона для расчета предела прочности с позиций строгого соблюдения правил теории напряжений в материалах и пришли к выводу о несоблюдении закона о линейной связи между контактными напряжениями в предельном состоянии горных пород, так как этот закон даёт существенно завышенные результаты по сравнению с экспериментальными данными.

В работах [4, 5] нами ранее была предпринята попытка использовать другой, более обоснованный подход к определению связи между напряжениями. В основу расчета распределения нормальных напряжений был положен метод

Прандтля, разработанный для широкой полосы. Доказано, что точное решение задачи с использованием двух дифференциальных и одного алгебраического уравнения равновесия обеспечивается при постоянном значении контактного касательного напряжения τ_{xy} , которое изменяется вдоль действия нормального сжимающего напряжения по зависимости

$$\tau_{xy} = \tau_k \cdot \left(1 - \frac{2Y}{h}\right). \quad (2)$$

Принято считать, что при этом подходе достоверность расчета обеспечивается вдали от боковых обнаженных граней, так в граничные условия заложено сохранение их прямолинейности, что не позволяет соблюсти закон парности касательных напряжений.

В реальных условиях вследствие деформирования боковые грани приобретают выпуклую форму в силу выпучивания свободных, обнаженных (бочкообразных) поверхностей с углом ψ между касательной к бочке и исходной свободной поверхности (рис. 1).

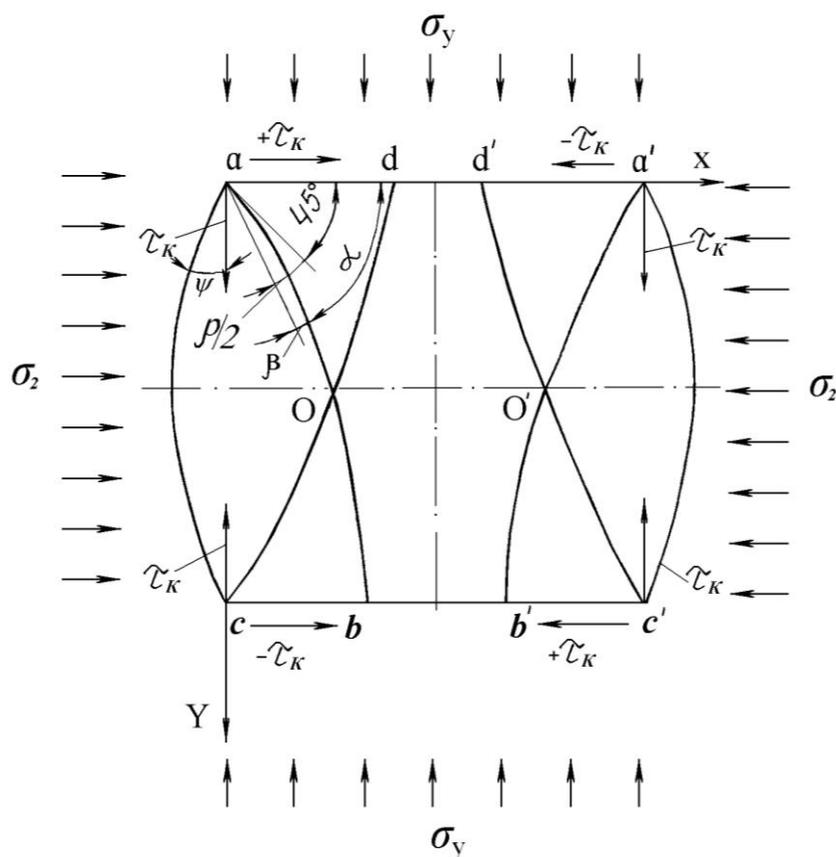


Рис. 1. – Схема контактных нагрузок в образце горной породы при наличии внешнего трения.

Это дает нам основание для применения закона парности касательных напряжений в приконтурной области образца. Получено, что теоретическое

распределение нормальных напряжений при постоянном значении касательных напряжений имеет вид выпуклого треугольника (рис. 2), что подтверждено многочисленными экспериментальными данными [2].

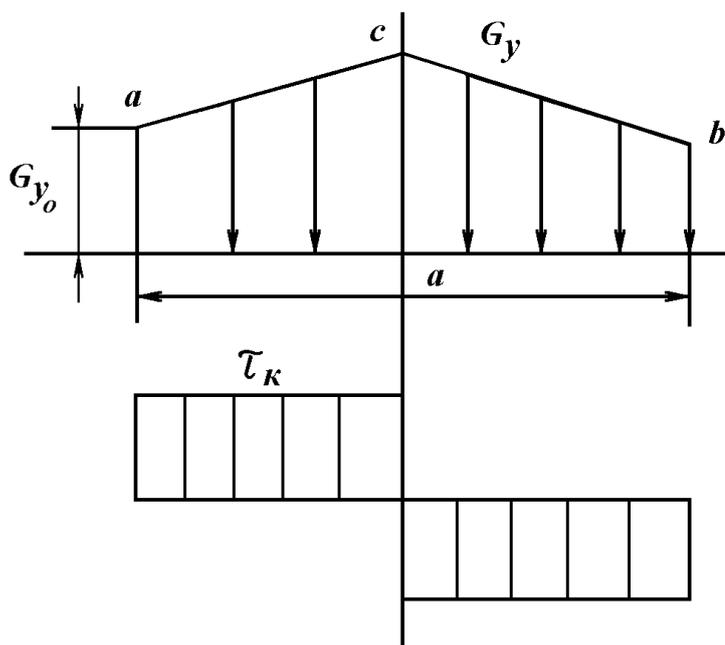


Рис. 2 – Эпюры контактных нормальных σ_y и касательных τ_k напряжений

Распределение нормальных напряжений σ_y на контрактной поверхности описывается простой формулой

$$\sigma_y = \sigma_{y0} \left(1 + \frac{2f \cdot x}{h} \right), \quad (3)$$

где σ_{y0} – предел прочности в угловой точке a .

Сила контактного давления на единицу длины образца равна

$$P = 2 \int_0^{a/2} 2\sigma_{y0} \cdot \left(1 + \frac{2f \cdot x}{h} \right) dx = \sigma_{y0} \cdot a \cdot \left(1 + \frac{f \cdot a}{2h} \right). \quad (4)$$

Удельное давление

$$p = \sigma_{y0} \left(1 + \frac{f \cdot a}{2h} \right). \quad (5)$$

Теперь с учетом этих положений в данной статье предстоит разработать метод расчета предела прочности образцов горных пород при объемном нагружении, когда имеет место боковое внешнее нагружение $\sigma_2 = \sigma_3$ (контактное трение на боковых гранях отсутствует) при постоянном значении касательных напряжений.

тельных напряжений на горизонтальной плоскости. Для разработки используем, как и раньше [1], критерий предельного состояния материалов с внутренним трением, по которому эффективные касательные напряжения по Кулону

$$\tau_{\rho} = \tau_{\alpha} - \mu\sigma_{\alpha}, \quad (6)$$

где τ_{α} и σ_{α} – активные касательные и нормальные напряжения на наклонной плоскости, μ – коэффициент внутреннего трения.

Направление элементарных сил трения на контактной поверхности образца, и, следовательно, касательных напряжений, примем против деформаций. Оговорим правило знаков касательных напряжений. Касательные напряжения принимаются положительными, если они направлены вдоль одной из осей координат, а нормальные сжимающие напряжения – вдоль другой оси. Из этого следует, что на верхней левой половине образца касательные напряжения имеют положительный знак, а нижней – отрицательный. На правой половине – наоборот.

Значения τ_{α} и σ_{α} определяются из известных выражений [1]

$$\tau_{\alpha} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_k \cos 2\alpha, \quad (7)$$

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_k \sin 2\alpha. \quad (8)$$

Подставив выражения (7) и (8) в формулу (6) и продифференцировав по α , находим выражение для определения наклона траектории максимальных касательных напряжений (линии скольжения), на которой эффективные касательные напряжения имеют максимальные значения:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{\mu(\sigma_x - \sigma_y) + 2\tau_k}. \quad (9)$$

Используя выражение (9), находим тригонометрические функции $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$, после подстановки которых в выражение (7), имеем

$$\tau_{\alpha} = \frac{\cos \rho}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_k^2}. \quad (10)$$

Далее продифференцируем по α выражение (8). После подстановки в полученную формулу тригонометрических функций получаем

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -\cos \rho \sqrt{\sigma_x - \sigma_y} + 4\tau_k^2. \quad (11)$$

Из сравнения выражений (10) и (11) вытекает, что

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -2\tau_\alpha. \quad (12)$$

По закону Кулона активные касательные напряжения τ_α равны сопротивлению материала сдвигу с учетом внутреннего трения с обратным знаком. С учетом этого, подставив значение из уравнения (6) в (12), имеем важное дифференциальное уравнение равновесного состояния на линии ξ

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = 2k + \mu\sigma_\alpha, \quad (13)$$

где k – текущее значение сопротивления материала внешнему касательному напряжению на линии скольжения.

Аналогично поступим с выражениями на линии скольжения η , угол наклона которой равен $\pi - \alpha$. Получим уравнение (13) со знаком минус множителя $(k + \mu\sigma_\alpha)$.

Решение уравнения (13) сводится к решению интеграла на линии скольжения ξ между точками a и b

$$\int_{\sigma_{\alpha b}}^{\sigma_{\alpha a}} \frac{d(k + \mu\sigma_\alpha)}{\mu} = 2 \int_{\alpha_b}^{\alpha_a} d\alpha. \quad (14)$$

Как видно, для решения этого уравнения нужно знать значения касательных напряжений k , нормальных напряжений σ_α и углов α наклона линий скольжения в точках a и b .

На основании тригонометрических функций из уравнения (8) имеем

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sin \rho}{2} \sqrt{\sigma_x - \sigma_y} + 4\tau_k^2. \quad (15)$$

Для определения суммы и подрадикального выражения найдем уравнение равновесия путем подстановки тригонометрических функций в выражение (6), получим:

$$\tau_\alpha = k = \frac{\cos \rho}{2} \sqrt{\sigma_x - \sigma_y} + 4\tau_k^2 - \mu \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}. \quad (16)$$

Откуда радикальное выражение составит:

$$\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_k^2} = \frac{2k + \mu(\sigma_x + \sigma_y)}{\cos \rho}. \quad (17)$$

Для определения суммы используем соотношение между поперечными и продольными нормальными напряжениями из работы [6]. На основании чего имеем

$$\frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} = \frac{(\sigma_x + \mu\sigma_y)}{\cos \rho} \left(\sin \rho - \sqrt{1 - b^2} \right) + \sigma_y, \quad (18)$$

где
$$b = \frac{\tau_k}{k + \mu\sigma_y} \quad (19)$$

С учетом формул (17) и (18) преобразуем уравнение (15) к виду

$$\sigma_\alpha = \sigma_y \left(-\sin \rho \sqrt{1 - b^2} \right) + k \cdot \cos \rho \cdot \sqrt{1 - b^2}.$$

Тогда нормальное напряжение в точке b на линии ξ

$$\sigma_{\alpha_b} = \sigma_y \left(-\sin \rho \cdot \sqrt{1 - b_b^2} \right) + k \cdot \cos \rho \cdot \sqrt{1 - b_b^2}. \quad (20)$$

Теперь, в отличие от одноосной нагрузки [5], учтем внешнюю нагрузку σ_2 . Тогда нормальное напряжение в точке a на линии ξ составит:

$$\sigma_{\alpha_a} = \sigma_2 \left(+\sin \rho \cdot \sqrt{1 - b_a^2} \right) + k_a \cdot \cos \rho \cdot \sqrt{1 - b_a^2}. \quad (21)$$

Теперь предстоит найти углы наклона α_a и α_b из выражения (9). Преобразуем его к виду

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{1 - \frac{2\mu\tau_k}{\sigma_x - \sigma_y}}{\mu + \frac{2\tau_k}{\sigma_x - \sigma_y}}. \quad (22)$$

Обозначим составляющую $\frac{2\tau_k}{\sigma_x - \sigma_y}$ через $\operatorname{tg} 2\beta$.

Тогда,

$$\beta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\tau_{\kappa}}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (23)$$

Как видно, для расчета угла β нужно знать разность $\sigma_x - \sigma_y$, которая определяется из уравнения (18)

$$\sigma_x - \sigma_y = \frac{2(\sigma_n + \mu\sigma_y) \left(\sin \rho - \sqrt{1 - b^2} \right)}{\cos \rho}. \quad (24)$$

Тогда, с учетом (19) угол

$$\beta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{b \cdot \cos \rho}{\sin \rho - \sqrt{1 - b^2}}. \quad (25)$$

Угол поворота линии скольжения в точке b от касательных напряжений

$$\beta_b = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{-\tau_{\kappa} \cdot \cos \rho}{(\sigma_b + \mu\sigma_y) \left(\sin \rho - \sqrt{1 - b_b^2} \right)}, \quad (26)$$

а в точке a –

$$\beta_a = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\tau_{\kappa} \cdot \left(1 - \frac{2Y}{h} \right) \cos \rho}{(\sigma_n + \mu\sigma_y) \left(\sin \rho - \sqrt{1 - b_a^2} \right)}. \quad (27)$$

Преобразуя выражение (22), находим α :

$$\alpha = 45 + \frac{\rho}{2} + \beta. \quad (28)$$

Угол наклона линии скольжения в точке a составит:

$$\alpha_a = 45 + \frac{\rho}{2} - \beta_a. \quad (29)$$

Угол β_a имеет отрицательный знак при $\sqrt{1 - b_a^2} > \sin \rho$. Угол β_b имеет положительный знак.

Поэтому угол α_b наклона линии скольжения в точке b :

$$\alpha_b = 45 + \frac{\rho}{2} + \beta_b. \quad (30)$$

Тогда имеем общий угол поворота линии скольжения между точками b и a с учетом знаков β_b и β_a за счет разности α_b и α_a

$$\alpha_{ba} = \beta_b + \beta_a. \quad (31)$$

Тогда из решения интеграла (14) с учетом (20), (21) и (31) имеем

$$\frac{k_b + \mu \sigma_y \cdot \left(-\sin \rho \cdot \sqrt{1 - b_b^2} \right) + k_b \cdot \cos \rho \cdot \sqrt{1 - b_b^2}}{k_a + \mu \sigma_2 \cdot \left(+\sin \rho \cdot \sqrt{1 - b_a^2} \right) + k_a \cdot \cos \rho \cdot \sqrt{1 - b_a^2}} = e^{2\mu(\beta_b + \beta_a)}. \quad (32)$$

Используя выражения (14, 32), и опуская громоздкие преобразования, получим систему уравнений для расчета нормального сжимающего напряжения в угловой точке a образца горных пород на линии ξ при трехосном сжатии

$$\begin{cases} \sigma_{y0} = \frac{1}{\mu} \left[\frac{k_n + \mu \sigma_2 \left(+\sin \rho \cdot \sqrt{1 - b_a^2} \right) \cdot e^{2\mu(\beta_b + \beta_a)}}{\left(-\sin \rho \cdot \sqrt{1 - b_a^2} \right)} - k_b \right] \\ k_b = \frac{k_n + \mu \sigma_y \left(-\sin \rho \cdot \sqrt{1 - b_a^2} \right)}{\left(+\sin \rho \cdot \sqrt{1 - b_a^2} \right) \cdot e^{4\mu\beta_b}} - \mu \sigma_2 \end{cases}. \quad (33)$$

В зависимости от направления образования трещины, например, в направлении от точки a в точку b , в вершине трещины $k_a = k_n$ – пределу сопротивления материала чистому сдвигу, в точке b – $k_a < k_n$.

С учетом распределения нормальных напряжений на контактной плоскости находим удельное давление, фиксируемое на прессе при раздавливании образцов горных пород при трехосном нагружении согласно (5)

$$p = \frac{1}{\mu} \left[\frac{k_n + \mu \sigma_2 \left(+\sin \rho \cdot \sqrt{1 - b_a^2} \right) \cdot e^{2\mu(\beta_b + \beta_a)}}{\left(-\sin \rho \cdot \sqrt{1 - b_a^2} \right)} - k_b \right] \cdot \left(1 + \frac{f \cdot a}{2h} \right). \quad (34)$$

Для определения предельного напряжения в точке d для линии скольжения η показатель экспонент имеет знак минус.

Выводы.

1. Разработан метод расчета предела прочности образцов горных пород при трехосном сжатии и постоянном контактом касательном напряжении от внешнего трения с использованием двух дифференциальных и одного алгеб-

раического уравнения. При предельном значении сжимающего напряжения в точках а или б при $\tau_s = k_{\text{п}}$ возникает трещина. В других областях материал деформируется упруго.

2. Применение метода при практических расчетах позволит повысить достоверность расчетных результатов с экспериментальными данными по сравнению с ранее разработанными методами.

3. В перспективе покажем, что трещина может развиваться только при увеличении продольной деформации, что позволяет рассчитать нормальные напряжения σ_y внутри материала в вершине трещины по мере ее движения и построить диаграммы «напряжение-продольная деформация» при трехосном сжатии образца.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев, Л.М. Метод расчета предела прочности горных пород на одноосное сжатие при линейной связи между контактными напряжениями / Л.М. Васильев, Д.Л. Васильев // Геотехническая механика. Днепропетровск, 2003. – Вып. 42. – С. 42-48.
2. Сторожев, М.В. Теория обработки металлов давлением / М.В. Сторожев, Е.А. Попов. – М.: Машиностроение, 1977. – 423 с.
3. О правомочности применения закона о линейной связи между контактными напряжениями для расчета предела прочности горных пород / Л.М. Васильев, К.В. Цепков, А.В. Пазынич, В.В. Зберовский, Р.Н. Наривский // Научный вестник НГУ. – Днепропетровск: НГУ, 2008. – № 3. – С. 3-6.
4. Васильев, Д.Л. Метод расчета распределения нормальных контактных напряжений в образцах горных пород при постоянном значении контактного трения / Д.Л. Васильев // Геотехническая механика. – Днепропетровск, 2003. – Вып. 44. – С. 37-44.
5. Васильев, Д.Л. Метод расчета предела прочности на сжатие образцов горных пород при постоянстве контактного касательного напряжения / Д.Л. Васильев // Збірник наукових праць НГУ. – Дніпропетровськ: РВК НГУ, 2009. – № 33. – С. 111-117.
6. Васильев, Д.Л. Метод расчета горизонтальных напряжений в массивах горных пород / Д.Л. Васильев // Геотехническая механика. – Днепропетровск: ИГТМ НАНУ, 2002. – Вып. 29 – С. 161-165.

Рекомендовано до публікації д.т.н М.С. Четвериком 21.08.09