УДК 678.4.06:621.81

Дырда В.И., Гончаренко А.В., Жарко Л.В.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СЖАТИИ ВЯЗКОУПРУГОГО ЦИЛИНДРА МЕТОДОМ РИТЦА

У статті розглянуто розрахунок масивного гумового віброізолятора на стиск методом Ритца.

SOLUTION OF A PROBLEM ON SQUEEZING OF THE VISCOELASTIC BARREL BY A METHOD OF RITZ

The calculation of massive rubber vibroinsulator in the case of compression by Ritz method is considered in the paper.

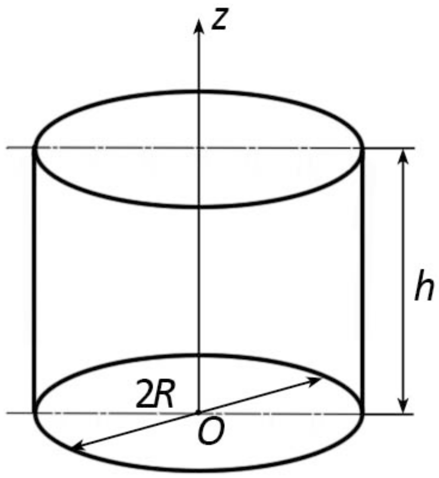
Ниже рассматривается расчет резиновых виброизоляторов, предназначенных в качестве элементов вибро-сейсмозащиты тяжелых машин и сооружений. Виброизоляторы такого типа отличаются большими геометрическими размерами (например, диаметр сейсмоблока для жилых зданий 400 мм, высота – 70-120 мм) и большими деформациями. Здесь уместно отметить, что для массивных резино-технических изделий при деформациях сжатия и сдвига в инженерной практике малыми деформациями считаются $\varepsilon_м < 0{,}1$ и большими – $\varepsilon_б \geq 0{,}1$ (соответственно для сдвига $\gamma_м = 0{,}1 \div 0{,}15$ и $\gamma_б = 0{,}2 \div 0{,}25$).

Целью настоящей статьи является расчет сплошного резинового цилиндра при сжатии при малых и больших деформациях с учетом особенностей на торцах, учитываемых коэффициентом ужесточения β. Нелинейность при больших деформациях учитывается оригинальным упругим потенциалом, полученным при экспериментальных исследованиях натурных вибро-сейсмоблоков.

Задача определения осадки резиновых элементов, работающих на сжатие, решалась в разное время такими авторами, как Э.Э. Лавендел [1], С.И. Дымников [2], В.Л. Бидерман, Н.А. Сухова [3, 4] и др. Авторами статьи проведен расчет для массивных резиновых сейсмоизоляторов (рис. 1) при малых и больших деформациях.

Рассмотрим задачу о сжатии цилиндрического резинового элемента сначала в малых деформациях. При учете больших деформаций процесс решения несколько отличается и будет рассмотрен ниже.

а



б

Рис. 1 – Общий вид (а) и расчетная схема (б) амортизатора

Расчет при малых деформациях. Используя метод Ритца, предположим, что осевые перемещения не зависят от радиуса и являются только функцией координаты *z*:

$$u_z = f\left(z\right). \qquad (1)$$

Запишем соотношения Коши для осесимметричной задачи:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad \varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}; \quad \varepsilon_{zr} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}, \tag{2}$$

где ε_z, ε_r, ε_θ – относительные линейные деформации в осевом, радиальном и окружном направлениях;

ε_{zr} – сдвиговая деформация;

u_r – радиальное перемещение.

Условие несжимаемости при малых деформациях имеет вид:

$$\varepsilon_z + \varepsilon_r + \varepsilon_\theta = 0 \tag{3}$$

или, с учетом (1) и (2)

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} = -f'(z).$$

Это дифференциальное уравнение может быть переписано в виде

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_r) = -f'(z).$$

Интегрируя его с учетом граничного условия $u_r = 0$ при $r = 0$, получаем

$$u_r = -\frac{1}{2} f'(z) r. \tag{4}$$

Подставляя полученное соотношение в (2), приходим к выражениям для деформаций:

$$\varepsilon_z = f'(z); \quad \varepsilon_r = \varepsilon_\theta = -\frac{1}{2} f'(z); \quad \varepsilon_{zr} = -\frac{1}{2} f''(z) r. \tag{5}$$

Удельная потенциальная энергия деформации в данном случае равна

$$W = G\left(\varepsilon_z^2 + \varepsilon_r^2 + \varepsilon_\theta^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_{zr}^2\right).$$

С учетом представлений (5), ее можно привести к виду

$$W = G\left[\frac{3}{2} f'^2(z) + \frac{1}{8} f''^2(z) r^2\right]. \tag{6}$$

Потенциальная энергия всего резинового элемента выражается интегралом:

$$\Pi = 2\pi \int_0^R \int_0^h W r\,dr\,dz.$$

Проинтегрировав по r с учетом выражения (6), получаем:

$$\Pi = \pi R^2 G \int_0^h \left[\frac{3}{2} f'^2(z) + \frac{1}{16} f''^2(z) R^2\right] dz.$$

Полная энергия системы может быть представлена в виде:

$$U = \Pi - P\Delta,$$

где P – сжимающая нагрузка;

$P\Delta$ – ее потенциал;

$\Delta = -\int_0^h f'(z)\,dz$ – осадка резинового элемента.

Полная энергия для данной задачи равна

$$U = \int_0^h \Phi(f', f'', z)\,dz, \tag{7}$$

где $\Phi(f',f'',z)=\pi R^2 G\left[\frac{3}{2}f'^2(z)+\frac{1}{16}f''^2(z)R^2\right]+Pf'(z).$

Условие минимума полной энергии системы, определяемой интегралом (7) имеет вид:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial f'}-\frac{d}{dz}\frac{\partial\Phi}{\partial f''}=0,$$

откуда для определения $f'(z)$ получаем дифференциальное уравнение

$$f'''(z)-\frac{24}{R^2}f'(z)=\frac{24}{R^2}\frac{P}{3\pi R^2 G}.$$

Это линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Его решение выглядит так:

$$f'(z)=-\frac{P}{3\pi R^2 G}+A_1\,\mathrm{ch}\frac{2\sqrt{6}z}{R}+A_2\,\mathrm{sh}\frac{2\sqrt{6}z}{R},$$

где A_1 и A_2 – постоянные интегрирования.

Постоянные интегрирования определяются из следующих граничных условий:

1) при $z=0$ $\frac{\partial P}{\partial z}=0$;

2) при $z=\frac{h}{2}$ $u_r=0$.

Тогда граничные условия для функции $f'(z)$ имеют вид:

$$\text{при } z=0 \quad f''(z)=0;$$

$$\text{при } z=\frac{h}{2} \quad f'(z)=0.$$

Отсюда находим

$$A_2=0;\quad A_1=\frac{P}{3\pi R^2 G}\cdot\frac{1}{\mathrm{ch}\frac{h\sqrt{6}}{R}}.$$

Таким образом,

$$f'(z)=-\frac{P}{3\pi R^2 G}\left[1-\frac{\mathrm{ch}\frac{2\sqrt{6}z}{R}}{\mathrm{ch}\frac{h\sqrt{6}}{R}}\right].$$

Осадка резинового элемента равна

$$\Delta=-\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}f'(z)dz=\frac{Ph}{3\pi R^2 G}\left[1-\frac{R}{h\sqrt{6}}\mathrm{th}\frac{h\sqrt{6}}{R}\right].$$

Как известно, при одноосном сжатии в случае малых деформаций зависимость между нагрузкой и осадкой выглядит так:

$$P_0=E\pi R^2\frac{\Delta}{h}$$

или

$$P_0 = 3G\pi R^2 \frac{\Delta}{h},$$

с учетом того, что для резины $E = 3G$.

Если осадка резинового элемента со свободными торцами равна осадке резинового элемента с привулканизованными к торцам металлическими пластинами, то

$$P = \beta P_0, \tag{8}$$

где

$\beta = 1 + 0{,}413\rho^2$ – по Пейну;

$\beta = 0{,}92 + 0{,}5\rho^2$ – по Лавенделлу;

β – коэффициент увеличения жесткости за счет закрепления торцов.

Авторами данной статьи предложено вычислять β по формуле:

$$\beta = 1 + 1{,}03\rho^2. \tag{9}$$

Формула (9) получена на основании математической обработки экспериментальных данных для массивных цилиндрических сплошных амортизаторов.

Расчет при больших деформациях. Приведем сначала расчет, проведенный Бидерманом и Суховой [3]. Используя статистическую теорию высокоэластичности, выражение для удельной потенциальной энергии деформации запишем в виде

$$W = GJ_1, \tag{10}$$

где J_1 – первый инвариант тензора конечной деформации, равный

$$J_1 = \varepsilon_z + \varepsilon_r + \varepsilon_\theta.$$

Известно [2], что в этом случае

$$P_0 = GF\left(\frac{1}{\lambda^2} - \lambda\right),$$

где $\lambda = \dfrac{h-\Delta}{h}$ – степень сжатия.

Итак, для определения жесткости резинового элемента следует использовать соотношение

$$P = \beta P_0 = \beta GF\left(\frac{1}{\lambda^2} - \lambda\right), \tag{11}$$

где β находится по формуле (9).

Как и выше, примем, что сечения остаются плоскими и осевые перемещения являются функциями только координаты z. Радиальные перемещения представим в виде

$$u_r = rf(z). \tag{12}$$

Соотношения Коши для случая конечных деформаций записываются так:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)^2\right]; \quad \varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)^2;$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{2}\left(\frac{u_r}{r}\right)^2; \quad \varepsilon_{zr} = \frac{\partial u_r}{\partial z}\left(1 + \frac{\partial u_r}{\partial r}\right)$$

или, после преобразований,

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2 - 1\right] + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)^2; \quad \varepsilon_r = \frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{\partial u_r}{\partial z}\right)^2 - 1\right];$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{u_r}{r}\right)^2 - 1\right]; \quad \varepsilon_{zr} = \frac{\partial u_r}{\partial z}\left(1 + \frac{\partial u_r}{\partial r}\right).$$

Подставляя в последние соотношения выражение (12), имеем

$$\varepsilon_z=\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2-1\right]+\frac{1}{2}\left[rf'(z)\right]^2; \qquad \varepsilon_r=\varepsilon_\theta=\frac{1}{2}\left\{\left[1+f(z)\right]^2-1\right\}; \tag{13}$$

$$\varepsilon_{zr}=rf'(z)\left[1+f(z)\right].$$

Условие несжимаемости для конечных деформаций

$$\left(1+2\varepsilon_z\right)\left(1+2\varepsilon_r\right)\left(1+2\varepsilon_\theta\right)-\varepsilon_{zr}^2\left(1+2\varepsilon_\theta\right)=1$$

после подстановки (12) принимает вид:

$$\left(1+f\right)^2\left(1+f\right)^2\left[\left(1+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2+\left(rf'\right)^2\right]-r^2f'^2\left(1+f\right)^2\left(1+f\right)^2=1,$$

или, после упрощения,

$$\left(1+f\right)^2\left(1+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)=1,$$

откуда получаем

$$\frac{\partial u_z}{\partial z}=\frac{1}{\left(1+f\right)^2}-1. \tag{14}$$

Потенциальная энергия деформации резинового элемента равна

$$\Pi=2\pi\int\limits_h\int\limits_r Wrdrdz, \tag{15}$$

где W – удельная потенциальная энергия деформации, которую вычисляют по формуле (10).

Подставляя в (10) выражения для компонент деформации, с учетом (14) получаем:

$$W=G\left\{\left(1+f\right)^2-1+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\left(1+f\right)^4}-1\right]+\frac{1}{2}\left(rf'\right)^2\right\}. \tag{16}$$

где введено обозначение

$$\psi=1+f.$$

Формула для энергии деформации всего резинового элемента (15) после подстановки выражения (16) может быть приведена к виду

$$\Pi=\pi R^2G\int\limits_h\left(\psi^2+\frac{1}{2\psi^4}-\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\psi'^2R^2\right)dz, \tag{17}$$

Потенциал внешней сжимающей силы равен

$$V=-P\Delta=P\int\limits_0^h\frac{\partial u_z}{\partial z}dz$$

или, с учетом (14),

$$V=P\int\limits_0^h\left(\frac{1}{\psi^2}-1\right)dz.$$

Для полной энергии системы имеем выражение вида

$$U=\Pi+V=\int\limits_h\Phi\left(\psi;\psi';z\right)dz, \tag{18}$$

где

$$\Phi(\psi;\psi';z)=\pi R^2 G\left(\psi^2+\frac{1}{2\psi^4}-\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\psi'^2R^2\right)+P\left(\frac{1}{\psi^2}-1\right).$$

Условие минимума полной энергии системы (18) запишется в виде

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\psi}-\frac{d}{dz}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\psi'}\right)=0\,.$$

После несложных преобразований приходим к дифференциальному уравнению второго порядка

$$\pi R^2 G\left[2\psi-\frac{2}{\psi^5}-\frac{R^2}{2}\psi''\right]-2P\frac{1}{\psi^3}=0.$$

Его несложно преобразовать к виду

$$\frac{R^2}{2}\cdot\frac{d}{d\psi}\left(\frac{d\psi}{dz}\right)\frac{d\psi}{dz}=2\psi-\frac{2}{\psi^5}-\frac{2P}{\pi R^2 G}\cdot\frac{1}{\psi^3}\,,$$

откуда получаем

$$\frac{R^2}{4}\left(\frac{d\psi}{dz}\right)^2=\psi^2+\frac{1}{2\psi^4}+\frac{P}{\pi R^2 G}\cdot\frac{1}{\psi^2}+C,$$

Проинтегрировав второй раз, имеем

$$z=\frac{R}{2}\int\frac{d\psi}{\sqrt{\psi^2+\frac{1}{2\psi^4}+\frac{P}{\pi R^2 G}\cdot\frac{1}{\psi^2}+C}}. \qquad (19)$$

Итак, задача определения функции ψ сведена к квадратуре. Для определения зависимости перемещения от нагрузки при заданном отношении $\frac{P}{\pi R^2 G}$ проводится численное интегрирование выражения (19) до величины $z = h/2$. Таким образом, найдено значение $\psi\big|_{z=\frac{h}{2}}=\psi_{\max}$. Далее, на основании (14), величина осадки резинового элемента определяется по формуле

$$\Delta=R\int\limits_{1}^{\psi_{\max}}\frac{\left(\frac{1}{\psi^2}-1\right)d\psi}{\sqrt{\psi^2+\frac{1}{2\psi^4}+\frac{P}{\pi R^2 G}\cdot\frac{1}{\psi^2}+C}}. \qquad (20)$$

Для расчета низких амортизаторов ($h/R\le 4$) можно использовать более простой метод расчета. В этом случае $(rf')^2\gg f^2$ и основным в формуле (17) будет последнее слагаемое, соответствующее энергии сдвига. Поэтому можно принять

$$\Pi=\frac{1}{4}\pi R^4 G\int\limits_h \psi'^2 dz.$$

Тогда для полной энергии системы имеем выражение

$$U=\int\limits_h \Phi(\psi;\psi';z)\,dz,$$

где

$$\Phi(\psi;\psi';z)=\frac{1}{4}\pi R^4 G\psi'^2+P\left[\frac{1}{\psi^2}-1\right].$$

Записывая условие минимума полной энергии системы и интегрируя, получаем

$$z=\frac{R}{2}\int\frac{d\psi}{\sqrt{\frac{P}{\pi R^2 G}\cdot\frac{1}{\psi^2}+C_1}},$$

где C_1 – постоянная интегрирования.

Проинтегрировав это выражение, приходим к следующей зависимости

$$z=\frac{R}{2\sqrt{C_1}}\sqrt{\psi^2+\frac{\chi}{C_1}}+C_2,$$

где $\chi=\frac{P}{\pi R^2 G}$;

C_2 – постоянная интегрирования.

Отсюда можем получить

$$\psi=\sqrt{\frac{4C_1}{R^2}\left(z-C_2\right)^2-\frac{\chi}{C_1}}. \tag{21}$$

Постоянные интегрирования найдем из следующих граничных условий (начало координат располагаем в среднем сечении амортизатора):

- при $z = 0$ $d\psi/dz=0$ (с учетом симметрии радиальных перемещений относительно среднего сечения);
- при $z=h/2$ $\psi = 1$ (к торцам амортизатора привулканизованы металлические пластины, поэтому радиальные перемещения отсутствуют).

Тогда постоянные интегрирования равны

$$C_2=0;\qquad C_1=\frac{R^2}{2h^2}-\sqrt{\frac{R^4}{2h^4}+\chi\frac{R^2}{h^2}}.$$

Для функции ψ получаем следующее выражение

$$\psi=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\chi\frac{4h^2}{R^2}}+1\right)-2\frac{z^2}{h^2}\left(\sqrt{1+\chi\frac{4h^2}{R^2}}-1\right)}. \tag{22}$$

Найдем зависимость между нагрузкой и осадкой амортизатора. Для этого проинтегрируем выражение (14) по координате z

$$\Delta=h-2\int_0^{\frac{h}{2}}\frac{dz}{\psi^2}.$$

В результате получим следующее

$$\Delta=h-\frac{R}{2\sqrt{\chi}}\ln\frac{\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\chi\frac{4h^2}{R^2}}+1\right)+\frac{h}{R}\sqrt{\chi}}{\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\chi\frac{4h^2}{R^2}}+1\right)-\frac{h}{R}\sqrt{\chi}}. \tag{23}$$

Обозначим

$$\chi\frac{h^2}{R^2}=\varphi\left(\frac{\Delta}{h}\right),$$

тогда

$$P=\varphi\left(\frac{\Delta}{h}\right)GF\frac{R^2}{h^2}, \tag{24}$$

где $F = \pi R^2$ – площадь поперечного сечения амортизатора до деформации.

Из формулы (23) можно найти зависимость $\varphi(\Delta/h)$, показанную на рис. 2.

Тогда для расчета как низких, так и высоких амортизаторов может быть использована формула, полученная при помощи суммирования нагрузки, затрачиваемой на деформацию сдвига, и нагрузки для деформации сжатия:

$$P = GF\left[\frac{1}{\lambda^2} - \lambda + \frac{R^2}{h^2}\varphi\left(\frac{\Delta}{h}\right)\right], \tag{25}$$

где $\lambda = 1 - \dfrac{\Delta}{h}$.

Авторы данной статьи предлагают использовать для удельной потенциальной энергии деформации (упругого потенциала) следующее выражение:

$$W = C_1 J_1 + C_2 J_1^2 + F(J_2), \tag{26}$$

где J_1, J_2 – первый и второй инварианты тензора конечной деформации, в нашем случае равные

$$\begin{aligned} J_1 &= \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z; \\ J_2 &= \varepsilon_r \varepsilon_\theta + \varepsilon_r \varepsilon_z + \varepsilon_\theta \varepsilon_z - \varepsilon_{zr}^2, \end{aligned} \tag{27}$$

C_1, C_2 – константы материала;

$F(J_2)$ – функция, принимающая различный вид для разных материалов.

Примем, что функция $F(J_2)$ линейна, т.е.

$$F(J_2) = C_3 J_2, \tag{28}$$

где C_3 – постоянная материала.

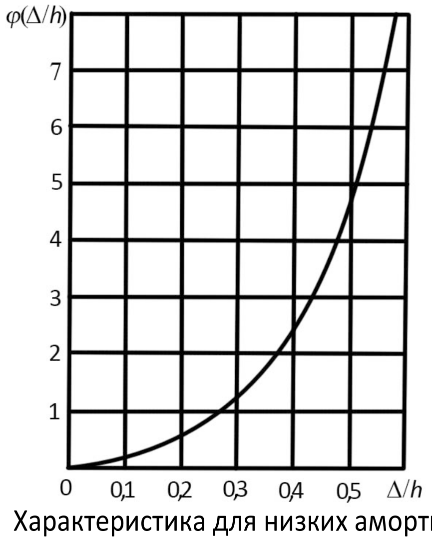


Рис. 2 – Характеристика для низких амортизаторов

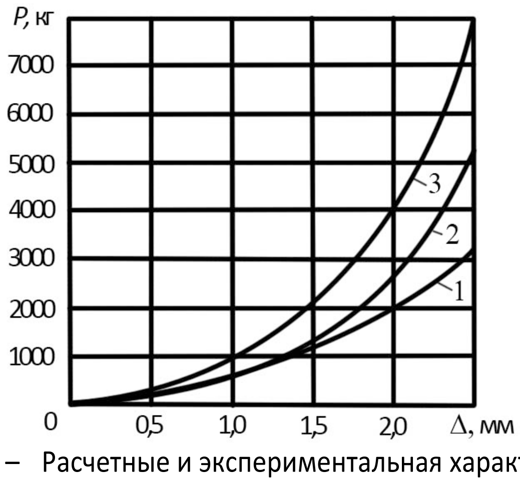


Рис. 3 – Расчетные и экспериментальная характеристики амортизатора

Проделывая аналогичные преобразования, в этом случае имеем

$$\begin{aligned} W = {} & \psi^2\left(C_1 - 3C_2 - \frac{3}{4}C_3\right) - \frac{3}{2}C_1 + \frac{9}{4}C_2 + \frac{1}{2}C_3 + \frac{1}{\psi^4}\left(\frac{1}{2}C_1 - \frac{3}{2}C_2 - \frac{1}{4}C_3\right) + \frac{1}{4}C_2\frac{1}{\psi^8} + \\ & + \psi^4\left(C_2 + \frac{1}{4}C_3\right) + \frac{1}{\psi^2}\left(C_2 + \frac{1}{4}C_3\right) + r^2\psi'^2\left(\frac{1}{2}C_1 - \frac{3}{2}C_2 - \frac{1}{4}C_3\right) + \frac{1}{4}C_2 r^4 \psi'^4 + \\ & + r^2\psi^2\psi'^2\left(C_2 + \frac{1}{4}C_3\right) + \frac{1}{2}C_2 r^2 \frac{\psi'^2}{\psi^4}, \end{aligned} \tag{29}$$

$$\Phi(\psi;\psi';z)=\pi R^2\left\{\psi\left(C_1-3C_2-\frac{3}{4}C_3\right)-\frac{3}{2}C_1+\frac{9}{4}C_2+\frac{1}{2}C_3+\frac{1}{\psi^4}\left(\frac{1}{2}C_1-\frac{3}{2}C_2-\frac{1}{4}C_3\right)+\right.$$

$$\left.+\psi^4\left(C_2+\frac{1}{4}C_3\right)+\frac{1}{4}C_2\frac{1}{\psi^8}\right\}+\frac{\pi R^4}{2}\left\{\psi'^2\left(\frac{1}{2}C_1-\frac{3}{2}C_2-\frac{1}{4}C_3\right)+\psi^2\psi'^2\left(C_2+\frac{1}{4}C_3\right)+\right. \quad (30)$$

$$\left.+\frac{1}{2}C_2\frac{\psi'^2}{\psi^4}\right\}+\frac{\pi R^6}{12}C_2\psi'^4+P\left(\frac{1}{\psi^2}-1\right).$$

В итоге получаем такое дифференциальное уравнение:

$$\psi''=\frac{\frac{4}{R^2}\left\{\psi\left(C_1-3C_2-\frac{3}{4}C_3\right)-\frac{1}{\psi^5}\left(C_1-3C_2-\frac{1}{2}C_3\right)+2\psi^3\left(C_2+\frac{1}{4}C_3\right)-C_2\frac{1}{\psi^9}\right\}}{C_1-3C_2-\frac{1}{2}C_3+2\psi^2\left(C_2+\frac{1}{4}C_3\right)+C_2\frac{1}{\psi^4}+2R^2C_2\psi'^2}-$$

$$-\frac{2\psi'^2\left\{\psi\left(C_2+\frac{1}{4}C_3\right)-C_2\frac{1}{\psi^5}\right\}+\frac{4P}{\pi R^4\psi^3}}{C_1-3C_2-\frac{1}{2}C_3+2\psi^2\left(C_2+\frac{1}{4}C_3\right)+C_2\frac{1}{\psi^4}+2R^2C_2\psi'^2}. \quad (31)$$

Итак, приходим к задаче Коши для уравнения (31) с начальными условиями:

$$\text{при}\quad z=0\quad \psi=1,\psi'=1. \quad (32)$$

Приведем уравнение (31) к безразмерному виду. Для этого введем новую переменную $\overline{z}=z/h$. Тогда

$$\psi'=\frac{d\psi}{dz}=\frac{1}{h}\frac{d\psi}{d\overline{z}}=\overline{\psi}';$$

$$\psi''=\frac{d^2\psi}{dz^2}=\frac{1}{h^2}\frac{d^2\psi}{d\overline{z}^2}=\overline{\psi}''.$$

Обозначим также

$$\overline{C}_k=C_k/G,\, k=1,2,3.$$

В итоге получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\overline{\psi}''=\frac{\frac{4h^2}{R^2}\left\{\psi\left(\overline{C}_1-3\overline{C}_2-\frac{3}{4}\overline{C}_3\right)-\frac{1}{\psi^5}\left(\overline{C}_1-3\overline{C}_2-\frac{1}{2}\overline{C}_3\right)+2\psi^3\left(\overline{C}_2+\frac{1}{4}\overline{C}_3\right)-\overline{C}_2\frac{1}{\psi^9}\right\}}{\overline{C}_1-3\overline{C}_2-\frac{1}{2}\overline{C}_3+2\psi^2\left(\overline{C}_2+\frac{1}{4}\overline{C}_3\right)+\overline{C}_2\frac{1}{\psi^4}+\frac{2R^2}{h^2}\overline{C}_2\overline{\psi}'^2}-$$

$$-\frac{2\overline{\psi}'^2\left\{\psi\left(\overline{C}_2+\frac{1}{4}\overline{C}_3\right)-\overline{C}_2\frac{1}{\psi^5}\right\}+\frac{4P}{\pi R^4G\psi^3}}{\overline{C}_1-3\overline{C}_2-\frac{1}{2}\overline{C}_3+2\psi^2\left(\overline{C}_2+\frac{1}{4}\overline{C}_3\right)+\overline{C}_2\frac{1}{\psi^4}+\frac{2R^2}{h^2}\overline{C}_2\overline{\psi}'^2}. \quad (33)$$

Далее осадка сейсмоизолятора определяется по формуле

$$\Delta=-\int_0^h\frac{\partial u_z}{\partial z}dz=-\int_0^h\left(\frac{1}{\psi^2}-1\right)dz. \quad (34)$$

Примеры расчета. 1. Авторы [3] выполнили расчет по формуле (11) для таких данных: вычислить нагрузку, создающую осадку Δ = 2 мм при действии на цилиндрический амортизатор с диаметром $d = 40$ мм, высотой $h = 5$ мм и модулем упругости $G = 8$ кгс/см^2.

В этом случае имеем

$$\lambda = 1 - \frac{\Delta}{h} = 1 - \frac{2 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-3}} = 0,6.$$

По рис. 351 [5] определяем, что $\beta = 9$. Тогда по формуле (11)

$$P = \beta GF\left(\frac{1}{\lambda^2} - \lambda\right) = 9 \cdot 8 \cdot 9,81 \cdot 10^4 \cdot \frac{3,14 \cdot \left(40 \cdot 10^{-3}\right)^2}{4}\left(\frac{1}{0,6^2} - 0,6\right) \approx 19319,9\,\text{Н} \approx 1932\,\text{кгс}.$$

Для расчета по формуле (25), по рис. 2 определяем, что $\varphi\left(\frac{\Delta}{h}\right) = 2,4$. Тогда

$$P = GF\left[\frac{1}{\lambda^2} - \lambda + \frac{R^2}{h^2}\varphi\left(\frac{\Delta}{h}\right)\right] = 8 \cdot 9,81 \cdot 10^4 \cdot 3,14 \cdot \left(20 \cdot 10^{-3}\right)^2\left[\frac{1}{0,6^2} - 0,6 + \frac{\left(20 \cdot 10^{-3}\right)^2}{\left(5 \cdot 10^{-3}\right)^2} \cdot 2,4\right] \approx$$

$$\approx 40000,1\text{Н} \approx 4000\,\text{кгс}.$$

2. Вычислим нагрузку, при которой осадка цилиндрического сейсмоизолятора диаметром $d = 200$ мм, высотой $h = 40$ мм и модулем упругости $G = 6,3$ кгс/см^2 равна $\Delta = 2$ мм.

Проверим формулу (11) с коэффициентом ужесточения β, определяемым по формуле (9). В рассматриваемом случае

$$\beta = 1 + 1,03\left(\frac{R}{h}\right)^2 = 1 + 1,03 \cdot \left(\frac{100 \cdot 10^{-3}}{40 \cdot 10^{-3}}\right)^2 \approx 7,43;$$

$$\lambda = 1 - \frac{\Delta}{h} = 1 - \frac{2 \cdot 10^{-3}}{40 \cdot 10^{-3}} = 0,95.$$

Подставляя полученные значения в формулу (11), имеем

$$P = \beta GF\left(\frac{1}{\lambda^2} - \lambda\right) = 7,43 \cdot 6,3 \cdot 9,81 \cdot 10^4 \cdot 3,14 \cdot \left(100 \cdot 10^{-3}\right)^2\left(\frac{1}{0,95^2} - 0,95\right) \approx 22786,4\,\text{Н} \approx$$

$$\approx 2278,6\text{кгс}.$$

Относительная ошибка по сравнению с экспериментальной величиной нагрузки, приведенной в [6], равна

$$\delta = \frac{\left|21000 - 22786,4\right|}{21000} \cdot 100\% \approx 8,5\%.$$

Так как амортизатор низкий ($h/R = 0,4 < 4$), то для вычисления осадки можно воспользоваться формулой (23). Учитывая, что

$$\chi\frac{h^2}{R^2} = \varphi,$$

при помощи несложных преобразований из этой формулы можно получить

$$\varphi = \frac{(A-1)^2(A+1)^2}{16A^2},$$

где $\quad A = e^{\frac{2(h-\Delta)\sqrt{\lambda}}{R}}$.

В данном случае имеем

$$\lambda = 1 - \frac{\Delta}{h} = 1 - \frac{2 \cdot 10^{-3}}{40 \cdot 10^{-3}} = 0,95.$$

Тогда

$$A = e^{\frac{2(h-\Delta)\sqrt{\lambda}}{R}} = e^{\frac{2\cdot(40\cdot10^{-3} - 2\cdot10^{-3})\sqrt{0,95}}{100\cdot10^{-3}}} \approx 2,1;$$

$$\varphi = \frac{(A-1)^2 (A+1)^2}{16A^2} = \frac{(2,1-1)^2 (2,1+1)^2}{16 \cdot 2,1^2} \approx 0,16.$$

Искомую нагрузку рассчитываем по формуле (25):

$$P = GF\left[\frac{1}{\lambda^2} - \lambda + \frac{R^2}{h^2}\varphi\left(\frac{\Delta}{h}\right)\right] = 6,3 \cdot 9,81 \cdot 10^4 \cdot 3,14 \cdot \left(100 \cdot 10^{-3}\right)^2 \cdot \left[\frac{1}{0,95^2} - 0,95 + \right.$$

$$\left. + \frac{\left(100 \cdot 10^{-3}\right)^2}{\left(40 \cdot 10^{-3}\right)^2} \cdot 0,16\right] \approx 22511,2\ \text{Н} \approx 2251,1\ \text{кгс}.$$

Относительная ошибка представленного расчета составляет

$$\delta = \frac{\left|21000 - 22511,2\right|}{21000} \cdot 100\% \approx 7,2\%.$$

3. Найдем осадку для сейсмоизолятора диаметром d = 400 мм, высотой h = 240 мм и модулем упругости G = 6,3 кгс/см^2 от действия нагрузки P = 50 кН. Для этого требуется решить задачу Коши для уравнения (31) с граничными условиями (32).

Эта задача была решена численно методом Рунге-Кутта четвертого порядка точности. Константы материала были выбраны таким образом, чтобы достаточно точно описать эксперименты, приведенные в [7]:

$$C_1 = G, C_2 = 1,5G, C_3 = 1,25G.$$

Полученное численное решение показано на рис. 4.

Далее радиальное перемещение в каждой точке сейсмоизолятора определяется по формуле

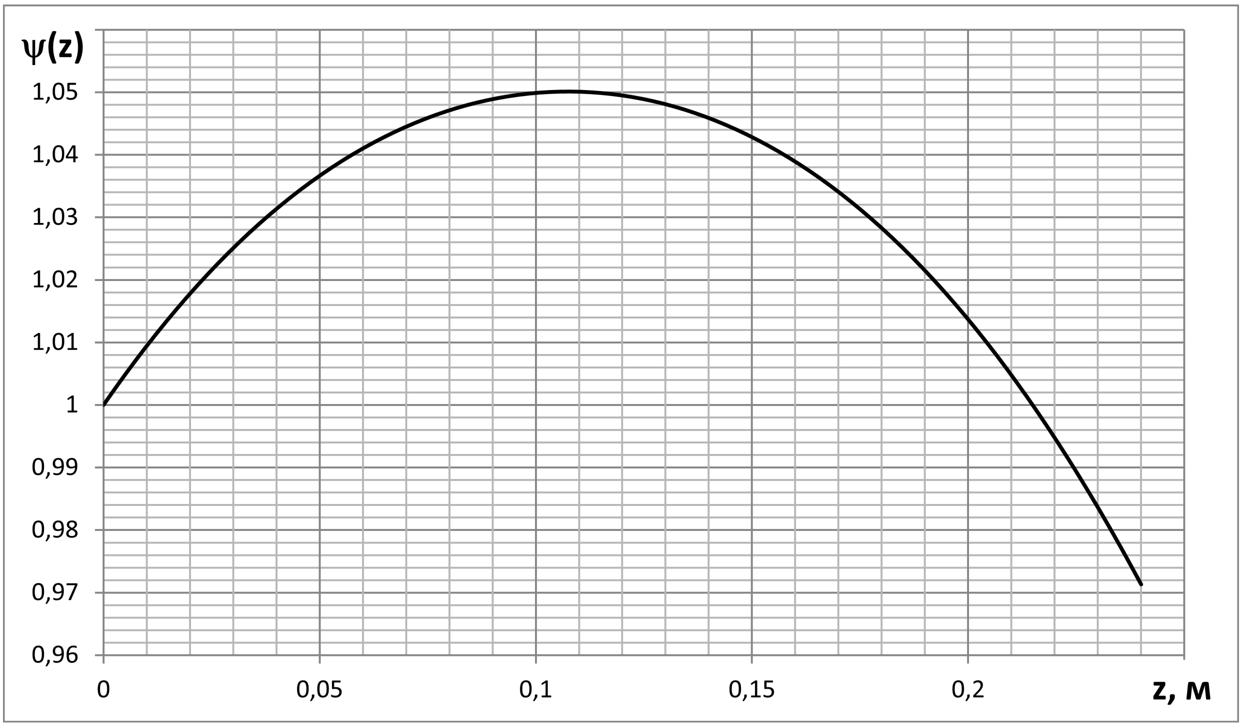


Рис. 4 – Зависимость функции ψ от координаты z

$$u_r = r\left[\psi(z) - 1\right],$$

а осевое – по формуле

$$u_z = \int_0^z \left[\frac{1}{\left(\psi(x)\right)^2} - 1\right] dx.$$

Для вычисления последнего интеграла использовался метод Гаусса. В результате расчетов получено значение осадки сейсмоизолятора Δ = 1,27 см, что хорошо совпадает с экспериментом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лавендел Э.Э. Расчет резинотехнических изделий. – М.: Машиностроение, 1976. – 232 с.
2. Дымников С.И. Расчет резино-технических деталей при средних деформациях // Механика полимеров. – 1968. – № 2. – С. 271-275.
3. Сухова Н.А., Бидерман В.Л. К расчету резиновых амортизаторов, работающих на сжатие // Расчеты на прочность. – 1962. – № 8. – С. 200-211.
4. Бидерман В.Л., Сухова Н.А. Расчет цилиндрических и прямоугольных длинных резиновых амортизаторов сжатия // Расчеты на прочность. – 1968. – № 13. – С. 55-72.
5. Расчеты на прочность в машиностроении / Под ред. Пономарева С.Д. – Машгиз, 1958. – Т. 2.
6. Некоторые особенности расчета резинометаллических элементов с учетом эффекта объемного сжатия / Дырда В.И., Твердохлеб Т.Е., Лисица Н.И. и др. // Геотехническая механика: Межвед. сб. научн. тр. – 2005. – Вып. 60. – С. 152-158.
7. Обосновать параметры, разработать конструкцию, изготовить и испытать в лабораторных условиях вибро-защитные опоры для сейсмозащиты многоэтажного дома (г. Ялта): Информационный отчет о НИР ИГТМ НАН Украины; рук. Дырда В.И., исполн. Лисица Н.И. [и др.]. – Днепропетровск, 2008. – 44 с. – инв. № 6875.