С.П. Минеев, д-р техн. наук (ИГТМ НАН Украины) С.Н. Федотов, канд. техн. наук О.В. Витушко, канд. техн. наук (ООО «Шахтостроймонтаж»)

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ГОРНОГО МАССИВА ПРИ УВЛАЖНЕНИИ УГОЛЬНОГО ПЛАСТА

Розглянута задача в рамках плоскої деформації про вплив зволоження вугілля на процес перерозподілу напружено-деформованого стану гірського масиву в прівибійній частині пласта. Встановлено, що зволоження вугілля сприяє зниженню і вирівнюванню вертикальної і горизонтальної напруги, приводить до розвантаження вугільного пласта поблизу вибію, зниженню максимального опорного тиску і переміщенню його углиб масиву.

RESEARCH OF REDISTRIBUTION OF THE INTENSE-DEFORMED CONDITION OF COAL MASSIF AT HUMIDIFYING OFTHE COAL LAYER

The problem about influence of humidifying of coal on process of redistribution of the is intense-deformed condition of coal massif in working face layer's parts is considered. It is established that coal humidifying promotes decrease and alignment of vertical and horizontal pressure, leads to unloading of a coal layer near to a working face and decrease a maximum of basic pressure and its moving deep into a massif.

При ведении горных работ на больших глубинах угольный пласт вблизи контура выработки, как известно, находится в пластическом состоянии. На практике для активного управления горным давлением, особенно при отработке выбросоопасных угольных пластов, нередко применяют способы искусственного изменения упругопластических свойств угольного пласта. Так, при разработке угольного пласта используются такие способы снижения выбросоопасности, как: увлажнение угля, его гидрорыхление и некоторые другие способы воздействия водным раствором с ПАВ в область пласта, примыкающую к горной выработке [1].

Искусственная гидрообработка пласта приводит к образованию в призабойной области участков пластических зон с различными физико-механическими свойствами. К настоящему времени проведены достаточно большие исследования по оценке влияния процесса увлажнения угля на изменение его свойств [2], разупрочнения угля, борьбы с газодинамическими явлениями и перераспределения напряженно-деформированного состояния горного массива вблизи зоны гидровоздействия на пласт [3, 4]. Однако однозначная картина изменения напряженно-деформированного состояния анизотропного горного массива, с учетом упругопластических свойств угля и пород, отсутствует. Поэтому авторы в рамках плоской деформации попытались оценить влияние увлажнение угля на напряженно-деформированное состояние анизотропного массива горных пород при разработке угольных пластов. Решение поставленной задачи выполнялось в следующей постановке. Рассмотрим наклонный пласт полезного ископаемого, расположенный на глубине H от дневной поверхности (рис. 1). Отклонение от горизонта составляет угол α . Угол Ψ фиксирует положение плоскостей изотропии горных пород. Считаем, что пласт в краевых частях $(-x_2^l, -x_p^l)$ и (x_p^r, x_2^r) деформируется в соответствии со своими пластическими свойствами [6], а на участках $(-x_p^l, -x_1)$ и (x_1, x_p^r) пластические свойства пласта искусственно изменены. Выработка в направлении оси z является достаточно протяженной. Это позволяет воспользоваться основными уравнениями плоской деформации анизотропного массива. Естественное (исходное) состояние массива вызвано его собственным весом и в системе координат xOy описывается формулами:

$$\sigma_{y}^{\circ} = -m\gamma(H - x\sin\alpha - y\cos\alpha), \quad \sigma_{x}^{\circ} = -n\gamma(H - x\sin\alpha - y\cos\alpha),$$

$$\tau_{xy}^{\circ} = -l\gamma(H - x\sin\alpha - y\cos\alpha). \quad (1)$$



Рис. 1 – Схема разработки наклонного пласта полезного ископаемого при активном воздействии на прочность угля

Здесь:

$$m = \frac{1+\lambda}{2} + \frac{1-\lambda}{2}\cos 2\alpha, \quad n = \frac{1+\lambda}{2} - \frac{1-\lambda}{2}\cos 2\alpha, \quad l = \frac{1-\lambda}{2}\sin 2\alpha, \quad (2)$$

где λ – коэффициент бокового распора, величина которого близка к единице.

При разработке пласта твердого полезного ископаемого к напряжениям (1) добавятся дополнительные напряжения. Поэтому компоненты тензора напряжений ищем в виде суммы:

$$\sigma_y^e = \sigma_y^\circ + \sigma_y, \quad \sigma_x^e = \sigma_x^\circ + \sigma_x, \quad \tau_{xy}^e = \tau_{xy}^\circ + \tau_{xy}, \quad (3)$$

где σ_{y} , σ_{x} и τ_{xy} – напряжения в массиве, появление которых обусловлено наличием выработки.

Для определения дополнительных напряжений и перемещений в массиве воспользуемся методом суперпозиции и сформулируем две группы смешанных граничных условий. Первая группа связана с нормальным деформированием кровли. Условия имеют вид:

$$\begin{split} \sigma_{y} &= m \mathcal{H} \left(1 - \frac{\sin \alpha}{H} x \right) - (a_{l} x + c_{l}), \quad -x_{2}^{l} < x < -x_{p}^{l}, \\ \sigma_{y} &= m \mathcal{H} \left(1 - \frac{\sin \alpha}{H} x \right) - (n_{l} x + m_{l}), \quad -x_{p}^{l} < x < -x_{1}, \\ \sigma_{y} &= m \mathcal{H} \left(1 - \frac{\sin \alpha}{H} x \right), \quad -x_{1} < x < x_{1}, \\ \sigma_{y} &= m \mathcal{H} \left(1 - \frac{\sin \alpha}{H} x \right) - (n_{r} x + m_{r}), \quad x_{1} < x < x_{p}^{r}, \\ \sigma_{y} &= m \mathcal{H} \left(1 - \frac{\sin \alpha}{H} x \right) - (a_{r} x + c_{r}), \quad x_{p}^{r} < x < x_{2}^{r}, \\ \tau_{xy} &= 0, \quad |x| < \infty, \quad v = h, \quad x \in (-\infty, -x_{2}^{l}) \cup (x_{2}^{r}, +\infty). \\ n_{l} &= -\frac{T_{n}^{l}}{h} \cdot \frac{1 - K \left(T_{n}^{l}, -x_{p}^{l} \right)}{2}, \quad n_{r} &= \frac{T_{n}^{r}}{h} \cdot \frac{1 - K \left(T_{n}^{r}, x_{p}^{r} \right)}{2}, \\ a_{l} &= -\frac{T_{n}}{h} \cdot \frac{1 - K \left(T_{n}, -x_{p}^{l} \right)}{2}, \quad a_{r} &= \frac{T_{n}}{h} \cdot \frac{1 - K \left(T_{n}, x_{p}^{r} \right)}{2}, \quad K(T, x) &= \frac{2 \left| \tau_{xy}^{\circ} (x, 0) \right|}{T} - 1, \\ m_{l} &= C \left(T_{n}^{l}, c_{p}^{l}, K \left(T_{n}^{l}, -x_{p}^{l} \right) \right) + n_{l} x_{1}, \quad m_{r} &= C \left(T_{n}^{r}, c_{p}^{r}, K \left(T_{n}^{r}, x_{p}^{r} \right) \right) - n_{r} x_{1}, \\ c_{l} &= -n_{l} \left(x_{p}^{l} - x_{1} \right) + C \left(T_{n}, c_{p}, K \left(T_{n}, -x_{p}^{l} \right) \right) + a_{l} x_{p}^{l}, \end{split}$$

Здесь:

$$c_{r} = n_{r} \left(x_{p}^{r} - x_{1} \right) + C \left(T_{n}, c_{p}, K \left(T_{n}, x_{p}^{r} \right) \right) - a_{r} x_{p}^{r},$$

$$C \left(T_{n}, c_{p}, \kappa_{p} \right) = T_{n} \frac{\sqrt{1 - c_{p}}}{1 - \kappa_{p}} \left(\frac{\pi}{2} - \kappa_{p} \sqrt{1 - \kappa_{p}^{2}} - \arcsin \kappa_{p} \right),$$

где T_n, T_n^l, T_n^r – пределы текучести при сдвиге в плоскости xOy для материала пласта; c_p, c_p^l, c_p^r – параметры пластической анизотропии пласта, величины которых изменяются в интервале $(-\infty, 1)$.

Решение смешанной задачи (4), ограниченное в точках x_2^l и x_2^r и исчезающее на бесконечности, дается формулой Келдыша-Седова [7] и записывается так:

$$\Phi^{(1)}(z_{1}) = \frac{\mu_{2}}{\mu_{2} - \mu_{1}} F(z_{1}), \quad \Psi^{(1)}(z_{2}) = -\frac{\mu_{1}}{\mu_{2} - \mu_{1}} F(z_{2}). \quad (5)$$

$$F(z) = \frac{\gamma Hm}{2} \left(1 - \frac{\sin \alpha}{H} \left(z - \sqrt{(z + x_{2}^{l})(z - x_{2}^{r})} \right) \right) + \left[a_{l} \, \vartheta\left(- x_{2}^{l}, -x_{p}^{l} \right) + a_{r} \, \vartheta\left(x_{p}^{r}, x_{2}^{r} \right) \right] \frac{\sqrt{(z + x_{2}^{l})(z - x_{2}^{r})}}{\pi} + \frac{a_{l}z + c_{l}}{2\pi i} \ln \frac{\chi(z, -x_{p}^{l})}{\chi(z, -x_{2}^{l})} - \frac{a_{r}z + c_{r}}{2\pi i} \ln \frac{\chi(z, x_{p}^{r})}{\chi(z, x_{2}^{r})} + \left[n_{l} \, \vartheta\left(- x_{p}^{l}, -x_{1} \right) + n_{r} \, \vartheta\left(x_{1}, x_{p}^{r} \right) \right] \frac{\sqrt{(z + x_{2}^{l})(z - x_{2}^{r})}}{\pi} + \frac{n_{l}z + m_{l}}{2\pi i} \ln \frac{\chi(z, -x_{1})}{\chi(z, -x_{p}^{l})} - \frac{n_{r}z + m_{r}}{2\pi i} \ln \frac{\chi(z, x_{1})}{\chi(z, x_{p}^{r})}.$$

где

$$\vartheta(t_1, t_2) = \operatorname{arctg}_{\sqrt{\frac{x_2^r - t_1}{x_2^l + t_1}}} - \operatorname{arctg}_{\sqrt{\frac{x_2^r - t_2}{x_2^l + t_2}}},$$
$$\chi(z, x) = \frac{-2i\sqrt{(z + x_2^l)(z - x_2^r)}\sqrt{(x_2^l + x)(x_2^r - x)} + (x_2^r - x_2^l)(z + x) - 2(zx - x_2^r x_2^l)}{(x_2^r + x_2^l)(x - z)}$$

Условие локального влияния выработки на напряженное состояние массива примет вид:

$$\frac{\gamma Hm}{2} \left(1 + \frac{\sin \alpha}{2H} \left(x_2^l - x_2^r \right) \right) + \\ + \frac{1}{2\pi} \left\{ a_l \zeta \left(-x_p^l, -x_2^l \right) - a_r \zeta \left(x_p^r, x_2^r \right) + n_l \zeta \left(-x_1, -x_p^l \right) - n_r \zeta \left(x_1, x_p^r \right) - \right. \right.$$
(6)
$$- \left[a_l \left(x_2^r - x_2^l \right) + 2c_l \right] \vartheta \left(-x_2^l, -x_p^l \right) - \left[a_r \left(x_2^r - x_2^l \right) + 2c_r \right] \vartheta \left(x_p^r, x_2^r \right) - \right. \\ \left. - \left[n_l \left(x_2^r - x_2^l \right) + 2m_l \right] \vartheta \left(-x_p^l, -x_1 \right) - \left[n_r \left(x_2^r - x_2^l \right) + 2m_r \right] \vartheta \left(x_1, x_p^r \right) \right\} = 0, \\ \zeta (t_1, t_2) = \sqrt{\left(x_2^l + t_1 \right) \left(x_2^r - t_1 \right) - \sqrt{\left(x_2^l + t_2 \right) \left(x_2^r - t_2 \right) }.$$

При удовлетворении граничных условий для перемещений (4) используем вид потенциалов (5) и формулу [7]:

$$\omega(b_k) - \omega(a_k) = 2 \int_{a_k}^{b_k} \operatorname{Re}(q_1 \Phi(t) + q_2 \Psi(t)) dt, \quad (k = \overline{1, n}),$$
(7)

Получим:

$$M(a_{l},c_{l},-x_{p}^{l},-x_{2}^{l})+M(a_{r},c_{r},x_{2}^{r},x_{p}^{r})+M(n_{l},m_{l},-x_{1},-x_{p}^{l})+M(n_{r},m_{r},x_{p}^{r},x_{1})+$$

$$+\left[\frac{\gamma Hm\sin\alpha}{2}\pi+a_{l}\vartheta(-x_{2}^{l},-x_{p}^{l})+a_{r}\vartheta(x_{p}^{r},x_{2}^{r})+n_{l}\vartheta(-x_{p}^{l},-x_{1})+n_{r}\vartheta(x_{1},x_{p}^{r})\right]\frac{(x_{2}^{r}+x_{2}^{l})^{2}}{8}=0.$$
(8)
$$M(A,B,t_{1},t_{2})=-\left(\frac{A}{4}(2t_{1}-x_{2}^{l}+x_{2}^{r})+B\right)\frac{\sqrt{(x_{2}^{l}+t_{1})(x_{2}^{r}-t_{1})}}{2}+$$

$$+\left(\frac{A}{4}(2t_{2}-x_{2}^{l}+x_{2}^{r})+B\right)\frac{\sqrt{(x_{2}^{l}+t_{2})(x_{2}^{r}-t_{2})}}{2}.$$

Трансцендентные уравнения (6) и (7) образуют систему двух уравнений для определения неизвестных длин призабойных пластических областей $\left(-x_{2}^{l},-x_{1}\right)$

и (x_1, x_2^r) в зависимости от длины свободно зависающей кровли, исходного горного давления, глубины, мощности, пластических свойств, угла наклона разрабатываемого пласта полезного ископаемого и от длин зон $(-x_p^l, -x_1)_{\rm H}(x_1, x_p^r)_{\rm C}$ измененными пластическими свойствами.

Вторая группа граничных условий, связанная с поперечным деформированием пород кровли, может быть записана так:

$$\sigma_{y} = 0, \qquad |x| < \infty.$$

$$\tau_{xy} = l\gamma H \left(1 - \frac{\sin \alpha}{H} x \right), \qquad -x_{2}^{l} < x < x_{2}^{r}, \qquad (9)$$

$$u = 0, \qquad -\infty < x < -x_{2}^{l}, \ x_{2}^{r} < x < \infty,$$

Для пород почвы граничные условия (9) полностью сохраняются. Решение смешанной задачи (9), исчезающее на бесконечности, имеет вид

$$\Phi^{(2)}(z_{1}) = \frac{\gamma H}{2} \frac{l}{\mu_{2} - \mu_{1}} \left\{ \left(1 - \frac{\sin \alpha}{H} z_{1} \right) \left(1 - \frac{2z_{1} + x_{2}^{l} - x_{2}^{r}}{2\sqrt{(z_{1} + x_{2}^{l})(z_{1} - x_{2}^{r})}} \right) - \frac{\sin \alpha (x_{2}^{l} + x_{2}^{r})^{2}}{8H\sqrt{(z_{1} + x_{2}^{l})(z_{1} - x_{2}^{r})}} \right\},$$

$$(10)$$

$$\Psi^{(2)}(z_{2}) = -\Phi^{(2)}(z_{2}).$$

Таким образом, напряженно-деформированное состояние массива с наклонной выработкой описывается функциями:

$$\Phi(z_1) = \Phi^{(1)}(z_1) + \Phi^{(2)}(z_1), \quad \Psi(z_2) = \Psi^{(1)}(z_2) + \Psi^{(2)}(z_2).$$
(11)

Расчеты системы трансцендентных уравнений (6) и (8) выполнены с помощью программных комплексов Borland C++ и Matlab. Результаты численных расчетов приведены в таблицах 1 и 2, позволяют нам оценить влияние изменения пластических свойств пласта на протяженность призабойной зоне участков $(x_2^l - x_1)$ и $(x_2^r - x_1)$. Численные расчеты выполнены при следующих таких значениях параметров: $2h=1_{\rm M}$, $x_1=30_{\rm M}$, $T_n=5_{\rm MII}$ а, $c_p=c_p^l=c_p^r=0$, $\lambda=0.9$, $\psi=0^\circ$.

T_n^l		$(x_2^l - x_1)$, м							$(x_2^r - x_1), м$						
	<i>Н</i> , м	α													
T_n^r		-60°	-45°	-30°	0°	30°	45°	60°	-60°	-45°	-30°	0°	30°	45°	60°
	800	6,83	7,15	7,19	6,59	7,36	7,41	7,11	7,11	7,41	7,36	6,59	7,19	7,15	6,83
5	1000	8,49	8,96	8,93	7,86	9,12	9,25	8,81	8,81	9,25	9,12	7,86	8,93	8,96	8,49
	1200	10,24	10,91	10,76	9,06	10,98	11,24	10,59	10,59	11,24	10,98	9,06	10,76	10,91	10,24
5	800	6,97	7,31	7,34	6,68	7,50	7,55	7,24	12,68	13,24	12,91	10,82	12,60	12,75	12,15
	1000	8,70	9,19	9,14	7,98	9,32	9,47	9,00	14,96	15,76	15,25	12,29	14,91	15,22	14,38
2,5	1200	10,52	11,22	11,05	9,21	11,25	11,53	10,85	17,32	18,45	17,67	13,63	17,30	17,83	16,69
2,5	800	12,30	12,92	12,76	10,93	13,06	13,39	12,82	12,82	13,39	13,06	10,93	12,76	12,92	12,30
	1000	14,59	15,45	15,12	12,41	15,45	15,97	15,15	15,15	15,97	15,45	12,41	15,12	15,45	14,59
2,5	1200	16,96	18,14	17,57	13,77	17,94	18,74	17,57	17,57	18,74	17,94	13,77	17,57	18,14	16,96

Таблица 1 – Длины зон пластических деформаций

Как видно из таблице 1, при уменьшении параметра T_n^r по сравнению с исходным T_n (длина выработанного пространства $2x_1$ при этом фиксируется) протяженности зон пластических деформаций $(x_2^l - x_1)$ и $(x_2^r - x_1)$ существенно увеличиваются. Увлажнение угля снижает прочность угля приблизительно в два раза.

Таблица 2 – Длины зон пластических деформаций при

	$(x_2^l - x_1), \mathbf{M}$							$(x_2^r - x_1), \mathbf{M}$						
x_p^l , M	x_p^r , M													
	30	32	34	36	38	40	30	32	34	36	38	40		
30	9,25	9,31	9,36	9,40	9,44	9,47	8,96	10,30	11,60	12,85	14,06	15,22		
32	10,63	10,69	10,74	10,78	10,82	10,85	9,02	10,36	11,66	12,91	14,12	15,28		
34	11,97	12,03	12,08	12,12	12,16	12,19	9,08	10,42	11,71	12,96	14,17	15,33		
36	13,27	13,33	13,38	13,42	13,46	13,49	9,12	10,46	11,76	13,01	14,22	15,38		
38	14,54	14,59	14,64	14,69	14,72	14,75	9,16	10,50	11,80	13,05	14,26	15,42		
40	15,76	15,82	15,87	15,91	15,94	15,97	9,19	10,53	11,83	13,08	14,29	15,45		

H = 1000 м, $T_n^l = T_n^r = 2,5$ МПа, $\alpha = 45^\circ$

В таблице 2 приведены длины зон пластических деформаций $\begin{pmatrix} x_2^l - x_1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} x_2^r - x_1 \end{pmatrix}$ в зависимости от длин участков увлажнения угля $\begin{pmatrix} x_p^l - x_1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} x_p^r - x_1 \end{pmatrix}$, когда прочность угля уменьшается в два раза. Как видно из таблицы, по мере увеличения участков увлажнения угля длины зон пластических деформаций возрастают.

Все выводы относительно протяженности призабойной пластической зоны автоматически переносятся на оценку максимума опорного давления на пласт.

Ниже приведены результаты расчетов напряженно-деформированного состояния массива горных пород (в данном случае рассмотрен песчанистый сланец при следующих численных значениях его упругих постоянных [8]: $E_1 = 1,074 \cdot 10^4$ МПа; $v_1 = 0,413$; $E_2 = 0,52 \cdot 10^4$ МПа; $v_2 = 0,198$; $G_2 = 0,12 \cdot 10^4$ МПа. Приняты следующие значения параметров: $2h = 1_{\text{M}}$; $\lambda = 0.9$; $\alpha = 0^{\circ},45^{\circ}$; $H = 1000_{\text{M}}$; $\psi = 0^{\circ}$; $\gamma = 2,5_{\text{T/M}}^3$; $x_1 = 30_{\text{M}}$; $(x_p^l - x_1) = (x_p^r - x_1) = 10_{\text{M}}$; $T_n = 5_{\text{MП}a}$; $T_n^l = T_n^r = 2,5_{\text{M}}$ МПа; $c_p = c_p^l = c_p^r = 0$. Длины зон пластических деформаций $(-x_2^l, x_1)$



Рис. 2 – Изобары $\sigma_y^e / \gamma H = \text{const}_{\text{в окрестности выработанного}}$ пространства при $\alpha = 0^\circ$ для сухого угля



Рис. 3 – То же, что на рис. 2, но для увлажненного угля



Рис. 4 – Изобары $\sigma_y^e / \gamma H = \text{const}_{\text{в окрестности выработанного пространства}$ при $\alpha = 45^\circ$ для сухого угля



Рис. 5 – То же, что на рис. 4, но для увлажненного угля

и (x_1, x_2^r) находим из системы трансцендентных уравнений (6), (8). Для сухого угля при $\alpha = 0^{\circ}$ они равны $(x_2^l - x_1) = (x_2^r - x_1) = 37,86$ м, при $\alpha = 45^{\circ} - (x_2^l - x_1) = 39,23$ м и $(x_2^r - x_1) = 38,96$ м; для увлажненного угля при $\alpha = 0^{\circ}$ длины зон пластических деформаций равны $(x_2^l - x_1) = (x_2^r - x_1) = 42,41$ м, при $\alpha = 45^{\circ}$ они равны $(x_2^l - x_1) = 45,97$ м и $(x_2^r - x_1) = 45,45$ м.

На рис. 2–5 построены изобары $\sigma_y^e / \mathcal{H} = \text{const}$ в окрестности выработанного пространства. Увлажнение угля приводит к увеличению максимальных растягивающих напряжений в породах кровли над выработанным пространством. Максимальные сжимающие напряжения при этом уменьшаются и перемещаются вглубь массива.

Таким образом, приведенные исследования показали, что проникновение растворов жидкости с поверхностно активными веществами способствует проращению микротрещин в угольном пласте. Это приводит не только к изменению физико-механических свойств, но и способствует снижению и выравниванию вертикальных и горизонтальных напряжений, что уменьшает вероятность разрушения угля в зоне, прилегающей к горной выработке. Увлажнение угля снижает его прочность, происходит разгрузка угольного пласта вблизи забоя и увеличение сближения боковых пород, при этом максимум сжимающих напряжений уменьшается и удаляется от забоя вглубь массива. Полученные результаты могут быть полезны при уточнении параметров способа гидрорыхления угольного пласта для снижения выбросоопасности, особенно с учетом характеристик самого пласта и вмещающих его пород.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. СОУ 10.1.00174088.011-2005 Правила ведения горных работ на пластах, склонных к газодинамическим явлениям. – Киев: Минуглепром Украины, 2005. – 225 с.

2. Минеев С.П. Горные работы в сложных условиях на выбросоопасных пластах / С.П.Минеев, А.А. Рубинский, О.В. Витушко, А.Г. Радченко. – Донецк: Східний видавничий дім, 2010. – 606 с.

3. Левшин А.А. Напряженно-деформированное состояние анизотропных горных пород вокруг очистной выработки / Левшин А.А. //Изв. высших учебных заведений. Горный журнал. – 1979. - №2. – С. 22-26.

4. Булат А.Ф. Напряженно-деформированное состояние анизотропного породного массива при отработке угольных пластов / Булат А.Ф., Витушко О.В., Гоман О.Г. – Днепропетровск: Полиграфист, 2000. – 216 с.

5. Минеев С.П., Федотов С.Н., Витушко О.Н.Оценка влияния изменения мощности угольного пласта на напряженно-деформированное состояние призабойной части горного массива // Вісник НГУ. – № 9-10, 2010.

6. Качанов Л.М. Основы теории пластичности / Л.М.Качанов- 2-е изд. – М.: Наука, 1969. – 420 с.

7. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И.Мусхелишвили. – М.: Наука, 1968. – 512 с.

8. Хилл Р. Математическая теория пластичности. - М.: Изд-во техн.-теорет. лит., 1956. - 407 с.