УДК 678:539.376

Козуб Ю.Г.

АНАЛИЗ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И ДОЛГОВЕЧНОСТИ ВИБРОИЗОЛЯТОРОВ

У статті розглянуті питання прогнозування довговічності еластомерних елементів конструкцій з урахуванням їх слабкої стисливості та в’язкопружності. Запропонований метод дозволяє отримати рішення задач циклічного деформування конструкцій і прогнозувати їх довговічність.

DEFORMATION AND DURABILITY ANALYSIS OF VIBROINSULATORS

The problems of durability prediction of elastomeric elements of constructions with regard to their weak compressibility and viscoelasticity. The proposed method allows to obtain solutions of problems of cyclic deformation of constructions and predict their durability.

В настоящее время в машиностроении и строительстве достаточно часто возникают проблемы виброизоляции и сейсмоизоляции. Одним из наиболее перспективных методов демпфирования колебаний является использование виброизоляторов на основе эластомерных или композитных материалов. Исследованию вязкоупругих свойств резины, анализу деформирования и разрушения эластомерных элементов конструкций посвящено достаточно большое количество работ отечественных и зарубежных авторов [1-7]. Одной из особенностей деформирования эластомеров является их слабая сжимаемость [3]. В расчётах динамического деформирования следует учитывать эффекты демпфирования резиновых элементов конструкций. Наиболее эффективным для описания вязкоупругих свойств является применение уравнений Вольтерра. Аналитические решения таких уравнений в задачах о циклическом нагружении получены лишь для одномерного случая, что значительно ограничивает возможности получить надёжное решение для элементов конструкций, имеющих сложную форму. В этом случае наиболее приемлемым является применение численных методов решения задач в трёхмерной постановке, одним из которых является метод конечных элементов.

Целью работы является разработка метода решения задач динамического деформирования и определения долговечности вязкоупругих элементов конструкций.

Для анализа динамического деформирования эластомерных элементов конструкций в этих условиях следует учесть, что величина статической деформации значительно превышает амплитудные значения динамического деформирования. Для численного анализа напряжённо-деформированного состояния в этом случае можно использовать теорию деформации предварительно нагруженных тел [16, 17].

Вариационная формулировка задачи динамического нагружения упругого тела в этом случае имеет вид

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iiint_V\left(\sigma^{ij}+\sigma^{ij}_{(0)}\right)\delta\varepsilon_{ij}dV-\delta\iiint_V\frac{1}{2}\rho\dot{u}_i\dot{u}_i dV-\right.$$
$$\left.-\iiint_V(P^i_{(0)}+P^i)\delta u_i dV-\iint_S\left(Q^i_{(0)}+Q^i\right)\delta u_i\right\}dt=0, \qquad (1)$$

где $\sigma^{ij}_{(0)}$ – начальные напряжения;

$P^i_{(0)}$, $Q^i_{(0)}$ – начальные значения массовых и поверхностных сил соответственно;

P^i, Q^i – текущие значения массовых и поверхностных сил;

$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}\right)$ – тензор деформаций.

При этом материал проявляет ярко выраженные вязкоупругие свойства, которые можно описать уравнениями Вольтерра

$$\sigma = E_0\left[\varepsilon - \int_0^t R(t-\tau)\varepsilon(\tau)d\tau\right], \tag{2}$$

где $R(t-\tau)$ – ядро релаксации.

Для эластомеров чаще всего используется ядро Работнова.

Для учёта слабой сжимаемости эластомеров используются различные подходы. В качестве моделей поведения эластомера могут использоваться модифицированный материал Гука [3]

$$\sigma^{ij} = \int_0^{\overset{*}{\varepsilon}_{kl}} 2\mu\left(\overset{*}{G}{}^{mi}\overset{*}{G}{}^{nj} - \frac{1}{3}\overset{*}{G}{}^{mn}G^{ij}d\varepsilon_{mn} - \int_0^{\overset{*}{\hat{G}}{}^{x}} B\left(\sqrt{I_3\left(\hat{G}^x\right)} - 1\right)\right)d\overset{*}{G}{}^{ij}, \tag{3}$$

материал Пенга-Ландела [12, 13]

$$\sigma^{ij} = \sqrt{I_3}\left\{\mu\left[I_3^{-4/3}g^{ij} + \left[-I_3^{-1/3} + \frac{4}{9}\left(I_3-1\right)\left(I_1-2\right) + \frac{2}{9}\left(I_3-1\right)\right]G^{ij}\right]\frac{1}{2}B\left(I_3-1\right)G^{ij}\right\}, \tag{4}$$

материал Линдли [13]

$$\sigma^{ij} = I_3^{-1/2}\left[\mu\left(g^{ij} - I_3G^{ij}\right) + \frac{Bc}{2}I_3\left(I_3-1\right)G^{ij}\right]. \tag{5}$$

Заменяем объёмный модуль и модуль сдвига интегральными операторами Вольтерра [3]

$$\mu\varphi = \mu\left[\varphi(t) - \int_{-\infty}^t R_\mu(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau\right], \quad B\varphi = B\left[\varphi(t) - \int_{-\infty}^t R_b(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau\right], \tag{6}$$

где R_μ, R_b – разностные ядра сдвиговой и объёмной релаксации.

После подстановки (6) в (3)-(5) и получаем физически и геометрически нелинейные законы состояния эластомеров. Причём во всех случаях можно выделить линейную составляющую, совпадающую с обобщённым законом Гука.

Построение разрешающих уравнений метода конечных элементов для трёхмерной задачи строится на основе использования интерполяционных функций формы для описания полей перемещений, скоростей и ускорений

$$\left(u:\dot{u}:\ddot{u}\right)_k = \sum_{s=1}^{8} N_{(s)}\left(u:\dot{u}:\ddot{u}\right)_k^{(s)}, \tag{7}$$

где $N_{(s)}$ – степенные функции формы для s –го узла конечного элемента;

$\left(u:\dot{u}:\ddot{u}\right)_k^{(s)}$ – векторы перемещений, скоростей и ускорений s-го узла конечного элемента по k направлению в базисной системе координат.

Для обеспечения высокой точности и эффективности процесса решения широкого класса задач иногда целесообразно повысить степень аппроксимирующих функций.

В линейном случае уравнение движения можно записать в виде системы дифференциальных уравнений

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = f(t), \tag{8}$$

где M – матрица масс;

C – матрица демпфирования;

K – матрица жёсткости;

$f(t)$ – вектор узловых сил.

Для определения компонент матрицы жёсткости вариацию потенциальной энергии деформации можно записать в виде

$$\delta\Pi = \int_V \sigma^{ij} \varepsilon_{ij} dv\,, \tag{9}$$

где $\sigma^{ij} = 2\mu g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl} + \lambda\theta g^{ij}$.

Используя тройную аппроксимацию полей перемещений, деформаций и функции изменения объёма [3] получаем матрицу жёсткости конечного элемента, моделирующего процесс деформирования слабосжимаемого эластомера

$$\begin{gathered}\delta\Pi = \delta\{u_s\}^T \{N\} \left[D_{ij}^s\right]^T \left[C^{ijkl}\right] \left[D_{kl}^t\right] \{N\}^T \{u_t\} + \\ +\delta\{u_s\}^T \{N\} \left[D_\theta^s\right]^T \left[C^\theta\right] \left[D_\theta^t\right] \{N\}^T \{u_t\} = \delta\{u_s\}^T [K] \{u_t\}\,,\end{gathered} \tag{10}$$

где $\left[C^{ijkl}\right], \left[C^\theta\right]$ – матрицы упругих констант;

$[D]$ – оператор дифференцирования;

$\{u_t\}$ – вектор узловых перемещений.

Матрицу масс вычисляем по формуле

$$M = \int_V \{N\} \rho \{N\}^T dv\,. \tag{11}$$

Определение матрицы демпфирования с помощью матриц, описывающих свойства конечных элементов не представляется возможным. Поэтому чаще всего её приближённо вычисляют в виде линейной комбинации матриц жесткости и масс.

Для системы конечных элементов при отсутствии демпфирования решение можно представить в виде разложения по собственным векторам. Из решения общей проблемы собственных значений необходимо определить частоты и формы собственных колебаний

$$K\varphi = \omega^2 M\varphi\,. \tag{12}$$

Поскольку собственные векторы M – ортогональны после умножения на матрицу Φ, составленную из собственных векторов-столбцов получаем систему уравнений равновесия

$$\ddot{u} + \Phi^T C \Phi \dot{u} + \Omega^2 u = \Phi^T f(t)\,, \tag{13}$$

где Ω^2 – диагональная матрица, состоящая из ω_i^2.

Полагая, что демпфирование пропорционально скорости получаем

$$\varphi_i^T C \phi_j = 2\omega_i h_i \delta_{ij}\,, \tag{14}$$

где h_i – коэффициент демпфирования соответствующей формы колебаний;

δ_{ij} – символ Кронекра.

Если известны n коэффициентов демпфирования соответствующих форм собственных колебаний, матрицу демпфирования можно приближённо вычислить по формуле [8]

$$C = M \sum_{i=0}^{n-1} a_i \left(M^{-1} K\right)^i\,, \tag{15}$$

где коэффициенты a_i определяются из решения уравнений

$$h_i = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(a_{k-1}\omega_i^{2k-3}\right). \tag{16}$$

Для $n=2$ выражение (15) приводится к формуле релеевского демпфирования.

Для прямого интегрирования уравнений динамического деформирования чаще всего используется метод Ньюмарка, согласно которому векторы перемещений, скоростей и ускорений на концах временного отрезка $\left[t;t+\Delta t\right]$ связаны соотношениями

$$\dot{u}_{t+\Delta t} = \dot{u}_t + \left[\left(1-\delta\right)\ddot{u}_t + \delta\ddot{u}_{t+\Delta t}\right]\Delta t,$$

$$u_{t+\Delta t} = u_t + \dot{u}_t\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\ddot{u}_t + \alpha\ddot{u}_{t+\Delta t}\right]\Delta t^2, \tag{17}$$

где $\delta \ge 0{,}5$, $\alpha \ge 0{,}25\left(0{,}5+\delta\right)^2$ – условия, при которых рассматриваемая схема интегрирования устойчива.

Выражая из (17) скорость и ускорение в конечный момент времени $t+\Delta t$ получаем рекуррентное соотношение относительно перемещений в этот момент времени

$$\begin{gathered} Mb_1u_{t=\Delta t} + Cb_1b_5u_{t=\Delta t} + Gu_{t=\Delta t} = f(t+\Delta t) + M\left(b_1u_t + b_2\dot{u}_t + b_3\ddot{u}_t\right) + \\ +C\left(b_1b_5u_t + \left(b_2b_5-1\right)\dot{u}_t + \left(b_3b_5-b4\right)\ddot{u}_t\right), \end{gathered} \tag{18}$$

где $b_1 = \dfrac{1}{\alpha\Delta t^2}$, $b_2 = \dfrac{1}{\alpha\Delta t}$, $b_3 = \dfrac{1}{2\alpha}-1$, $b_4 = \Delta t\left(1-\delta\right)$, $b_5 = \delta\Delta t$.

Определив перемещения на конце временного интервала можно определить скорости и ускорения в этот же момент времени

$$\ddot{u}_{t+\Delta t} = b_1(u_{t+\Delta t}-u_t) - b_2\dot{u}_t - b_3\ddot{u}_t,$$

$$\dot{u}_{t+\Delta t} = \dot{u}_t + b_4\ddot{u}_t + b_5\ddot{u}_{t+\Delta t}. \tag{19}$$

Рассмотрим деформирование цилиндрического сплошного резинометаллического амортизатора. Условия нагружения: $u_z = u_0\sin\omega t$. Параметры амортизатора: R = 0,1 м, $H = 0{,}8R$, ρ = 1200 кг/м^3, $G = 0{,}78$ МПа. Реологические параметры материала $\alpha = -0{,}6$, $\beta = 0{,}91$, $\lambda = 0{,}35$. Результаты расчёта в безразмерных величинах приведены в табл. 1.

Таблица 1 – Зависимость амплитуды перемещений среднего слоя от частоты нагружения

$\Omega = \omega R\sqrt{\rho/G}$	6,324	7,115	10,276	12,648
u/H	0,031	0,125	0,028	0,034

Одним из подходов при прогнозировании долговечности эластомерных элементов конструкций является использование энергетического критерия [21]

$$\Delta U_p^* = \int_0^{t^*}(\sigma^{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + \dot{\chi} - \dot{q})dt, \tag{20}$$

где ΔU_p^* – предельное (критическое) значение плотности энергии, идущей на разрушение резины;

$\dot{q}$ – тепловой поток;

$\dot{\chi}$ – энергия внешней агрессивной среды;

$t^* = \frac{2\pi}{\omega} N^*$ – время до локального разрушения;

N^* – число циклов до локального разрушения.

При циклических колебаниях температура диссипативного разогрева является установившейся. Пренебрегая действием агрессивной среды, получим соотношения для локальной долговечности

$$N^* = \frac{\Delta U_p^*}{\frac{1}{2}\sigma^{ij}\varepsilon_{ij}\psi\eta_p}, \tag{21}$$

где ψ – коэффициент диссипации энергии;

η_p – коэффициент расхода диссипированной энергии на разрушение.

Если параметры материала зависят от времени нагружения, т.е. материалу присуще существенное старение, то выражение (4) имеет вид

$$N^* = \frac{\Delta U_p^*}{\int_0^{t^*} \frac{1}{2} C^{ijkl}(t)\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij}\psi(t)\eta_p dt}. \tag{22}$$

На основании экспериментальных данных [6] функциональная зависимость от времени для условно-равновесного и динамического модулей упругости, определяющих вид упругих констант C^{ijkl}, а также коэффициента поглощения имеют вид

$$E_\infty = E_\infty^k + (E_\infty^0 - E_\infty^k)e^{(-k_\varepsilon t)}, \tag{23}$$

$$E_\partial = E_\partial^k + (E_\partial^0 - E_\partial^k)e^{(-k_\varepsilon t)}, \tag{24}$$

$$\psi = \psi_0 - k_\psi t. \tag{25}$$

После интегрирования получаем соотношения для локальной долговечности для линейного растяжения

$$E_\partial^k \psi_0 t^* - 0{,}5 E_\partial^k k_\psi t^{*2} = \frac{4\pi}{\varepsilon^2 \omega \eta_p}\Delta U_p^*. \tag{26}$$

В общем случае решение уравнения (22) для локальной области виброизолятора сопряжено с трудоёмкой процедурой, что, в свою очередь, требует привлечения численных методов решения, например, метода конечных элементов.

Циклическое деформирование слабосжимаемых эластомеров при наличии диссипативного разогрева можно описать в квазистатической постановке в виде уравнения Био и уравнения теплопроводности

$$\iiint_V \delta F dv - \iiint_V \vec{P}\delta\vec{u} dv - \iint_S \vec{Q}\delta\vec{u} ds = 0, \tag{27}$$

$$\iiint_V c_\varepsilon (T - T_0)\delta T dv + \iiint_V \beta_{ij}\left(T - T_0\right)\delta\varepsilon_{ij} dv = \iiint_V \lambda_{ij} T_{,i}\delta T_{,j} dv + \iiint_V w_0 \delta T dv + \iint_S \left[q + h(T - \theta)\right]\delta T ds, \tag{28}$$

где F – свободная энергия;

$\overline{P}$, $\overline{Q}$ – векторы объёмных и поверхностных нагрузок;

$\overline{u}$ – вектор перемещений;

c_ε – теплоёмкость при постоянной деформации;

β_{ij} – компоненты тензора изотермических упругих постоянных, определяющих взаимное влияние температурного поля и поля деформаций;

λ_{ij} – компоненты тензора теплопроводности;

w_0 – плотность внутренних источников теплообразования;

h – коэффициент теплообмена;

θ – температура окружающей среды.

Заменим модуль B и модуль сдвига операторами Вольтерра для материала Гука и запишем вариацию свободной энергии для слабосжимаемого вязкоупругого материала Гука

$$\delta F = \iiint_V \left\{ 2\mu \left[\varepsilon_{mn} g^{mi} g^{nj} - \frac{1}{3}\theta g^{ij} - \int_{-\infty}^{t} R_\mu (t-\tau) \left(\varepsilon_{mn} g^{mi} g^{nj} - \frac{1}{3}\theta g^{ij} \right) d\tau \right] + \right.$$

$$+ B \left[\left(\sqrt{I_3} - 1 \right) g^{ij} - \int_{-\infty}^{t} R_b (t-\tau) \left(\sqrt{I_3} - 1 \right) g^{ij} d\tau \right] \delta\varepsilon_{ij} - B \left[3\alpha_T \left(T - T_0 \right) - \right. \qquad (29)$$

$$\left. \left. - 3 \int_{-\infty}^{t} R_b (T - T_0) \alpha_T \left(T - T_0 \right) d\tau \right] \delta\varepsilon_{ij} \right\} dv.$$

Аналогично можно записать вариацию свободной энергии для материалов Пенга-Ландела и Линдли.

В конечноэлементной формулировке задача определения напряженно-деформированного состояния сводится к нелинейной системе уравнений, для решения которой используется модифицированный метод Ньютона - Канторовича

$$K u^{i+1} = -N(u^i) - P_k ,$$

где K – матрица жёсткости конструкции;

$N(u^i)$ – оператор нелинейных добавок, обусловленных геометрической и физической нелинейностью материала;

P_k – вектор нагрузок на k-м шаге нагружения.

Пример. Рассмотрим прогнозирование долговечности цилиндрического виброизолятора типа ВРМ903М из резины 2959 при следующих параметрах: ψ_0 = 0,31; η_p = 0,52; $E_д^к$ = 8,16 МПа; $E_д^0$ = 4,8 МПа; k_ψ = 0,083·10^{-8} с$^{-1}$; $\Delta U_p^* = 0{,}6 \cdot 10^{12}$ Дж/м^3; ε = 0,3·10^{-6} м, параметры ядра Работнова α = -0,6, β = 1,06. Размеры эластомерного элемента: D = 180 мм, H = 100 мм. Частота нагружения – 14 Гц.

Долговечность составила N^* = 9,1·10^9 циклов.

Такая долговечность не противоречит ранее полученным экспериментальным данным для резины 2959 [11].

Выводы. Получены соотношения для анализа напряжённо-деформированного состояния нелинейных слабосжимаемых вязкоупругих эластомерных элементов конструкции в условиях длительного циклического нагружения.

Разработан метод определения долговечности эластомерных виброизоляторов с учётом нелинейности их деформирования и физико-механических свойств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Потураев В.Н. Прикладная механика резины / В.Н. Потураев, В.И. Дырда, И.И Круш. – К.: Наук. думка, 1980. – 260 с.
2. Дырда В.И. Прочность и разрушение эластомерных конструкций / В.И. Дырда. – К.: Наук. думка, 1988. – 232 с.
3. Киричевский В.В. Нелинейные задачи термомеханики конструкций из слабосжимаемых эластомеров / В.В. Киричевский, А.С. Сахаров. – К.: Будівельник, 1992. – 216 с.
4. Бартенев Г.М. Прочность и разрушение высокоэластичных материалов / Г.М. Бартенев, Ю.С. Зуев. – М.: Химия, 1964. – 387 с.
5. Mooney M.A. Theory of Large Elastic Deformation / M.A. Mooney // J. Appl. Phys. – 1940. – N 11. – Pp. 582-592.
6. Дырда В.И. Определение реологических параметров эластомерных материалов / В.И. Дырда, Ю.Г. Козуб, А.С. Кобец, А.П. Науменко, Т.Е. Твердохлеб, А.А. Яценко // Геотехническая механика: Межвед. сб. научн. тр. – 2007. – Вып. 70. – С. 56-88.

7. Лавендел Э.Э. Прикладные методы расчёта изделий из высокоэластичных материалов / Э.Э. Лавендел. – Рига: Зинатне, 1980. – 238 с.
8. Бате К. Численные методы анализа и метод конечных элементов / К. Бате, Е. Вилсон. – М.: Стройиздат, 1982. – 470 с.
9. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / К. Васидзу. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
10. Дохняк Б.М. Расчёт предварительно напряженных конструкций из эластомеров / Б.М. Дохняк, Ю.Г. Козуб // Материалы XIII Симпозиума «Проблемы шин и резинокордных композитов». – 14-18 октября 2002 г. – М.: НИИ шинной промышленности, 2002. – С. 119-123.
11. Дырда В.И. Механика деформирования и разрушения упруго-наследственных сред / В.И. Дырда, А.С. Кобец, А.А. Демидов. – Днепропетровск: Герда, 2009. – 584 с.
12. Peng R.W. Stored energy function and compressibility ofcompressible rubber-like materials under large strains / R.W. Peng, R.F. Landel // J. Appl. Phys. – 1975. – V. 46, N 6. – Pp. 2599-2604.
13. Адамов А.А. К выбору функционала для описания поведения вязкоупругого материала при конечных деформациях / А.А. Адамов // Научн. тр. Кубан. гос. ун-та. – 1980. – Т. 3: Механика эластомеров. – С. 13-25.

УДК 628.517.4:621.752

Новикова А.В.

ВИБРОИЗОЛЯЦИЯ ТЯЖЕЛЫХ ОКОМКОВАТЕЛЕЙ-СМЕСИТЕЛЕЙ С ПОМОЩЬЮ РЕЗИНОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Розглядається віброізоляція важких технологічних машин за допомогою гумових елементів.

VIBROINSULATION OF HEAVY PELLETIZER-MIXERS BY RUBBER ELEMENTS

Vibroinsulation of heavy technological machines by rubber elements is considered.

1 Введение

Барабанные смесители и окомкователи – широко распространённые машины, применяемые для смешивания и окомкования руд черных и цветных металлов, в химической промышленности, а также в других областях. Их преимущества перед другими конструкциями заключается в более высокой производительности, относительной простоте и высоком качестве смешивания и окомкования.

Работа барабанных смесителей и окомкователей аглофабрик приводит к значительным вибрациям, источниками которых являются процесс перемешивания шихты, а также неравномерный износ и неуравновешенность узлов и деталей. Это способствует разрушению перекрытий и стен зданий аглокорпусов; снижает качество смешивания и окомкования, ограничивает интенсификацию технологического процесса. Вибрации сопровождаются также шумом, превышающим санитарные нормы и вредно действующим на обслуживающий персонал.

Ниже предлагается следующая система виброизоляции: предполагается установить барабан с приводом, кроме очистного устройства и установки для увлажнения шихты, на общую раму. Между рамой и перекрытием устанавливаются опорные виброизоляторы. Такая конструкция отличается простотой и экономичностью; она будет иметь достаточный срок службы, позволит снизить параметры вибраций до допускаемых норм и параметры шума до санитарных норм; будет создана возможность замены виброизоляторов при кратковременных остановках.

Целью данной статьи является исследование динамики таких машин и разработка системы виброизоляции для уменьшения производственной вибрации.

2 Основная часть и метод решения

2.1 Математическая модель на основе интегральных соотношений Вольтерра

Применительно к рассматриваемой схеме окомкователя (одномассная система) уравнение колебаний записывается как [1]: